Solutions des modèles linéaires à anticipations rationnelles

Laurence **BROZE**
Ariane **SZAFARZ** *

Nous présentons une démarche permettant d'obtenir l'ensemble de toutes les solutions d'un modèle linéaire à anticipations rationnelles quelconque. Cette approche fait jouer un rôle fondamental aux processus de révision intervenant dans la mise à jour des prévisions. Il apparaît que l'ensemble des solutions peut être décrit au moyen d'un nombre de différences de martingales arbitraires, nombre égal au plus grand indice des variables à prévoir. Cette approche se révèle particulièrement adaptée à la recherche de solutions admettant une représentation moyenne mobile.

L'introduction d'anticipations dans les modèles macroéconomiques est un moyen de prendre en compte un aspect dynamique. Comme des observations directes des anticipations sont rarement disponibles, il est nécessaire d'utiliser des schémas théoriques expliquant comment sont fixées les prévisions. Dans cet article nous nous intéressons à des anticipations rationnelles, c'est-à-dire à des anticipations égales aux prévisions optimales fondées sur l'information contenue dans le modèle.

Avant d'étudier les problèmes d'identification et d'estimation, il est nécessaire de résoudre le modèle afin d'éliminer les anticipations non observables. Cette résolution conduit généralement à une multiplicité de solutions compatibles avec le modèle initial. Il est important aussi bien pour l'interprétation économique que pour l'utilisation des méthodes d'inférence statistique de décrire de manière exhaustive l'ensemble des solutions.

Diverses méthodes de résolution ont été proposées pour des modèles particuliers. Des solutions ont ainsi été obtenues en utilisant une démarche récursive (BLANCHARD [1979], MACCALUM [1976], VISCO [1981], WEGGE [1984]...) ou en se restreignant aux solutions admettant une représentation moyenne mobile (MUTH [1961], SHILLER [1978], TAYLOR [1977]...).

L'ensemble des solutions a été pour la première fois décrit de manière exhaustive dans un article de GOURIEROUX-LAFFONT-MONFORT [1982]. La solution générale, explicitée pour un modèle contenant une anticipation de la valeur future de la variable endogène, s'exprime en fonction d'une martingale arbitraire. Ces diverses approches sont décrites dans la section 1.

Dans la section 2, nous présentons une nouvelle démarche permettant d'obtenir l'ensemble de toutes les solutions pour un modèle linéaire à anticipations rationnelles contenant un nombre quelconque d'anticipations. Cette approche fait jouer un rôle fondamental aux processus de révision intervenant dans la mise à jour des prévisions. Il apparaît que l'ensemble des solutions peut être décrit à l'aide d'un certain nombre de différences de martingales arbitraires.

Diverses conséquences du résultat général sont examinées dans la section 3. Il est montré que l'approche est particulièrement adaptée à la recherche des solutions en anticipations parfaites et de celles admettant une représentation moyenne mobile. Cette démarche est finalement appliquée à la résolution de divers modèles particuliers (section 4).

1 Description des principales méthodes de résolution

1.1. Modèle d'hyperinflation

Nous allons présenter les principales méthodes de recherche de solutions à partir de l'exemple du modèle d'hyperinflation initialement proposé par CAGAN. Il s'agit d'un modèle d'équilibre sur le marché de la monnaie. La demande de monnaie est fonction des prix, du taux d'inflation anticipé et de divers facteurs exogènes :

$$(1) \quad m_t^d = \alpha p_t + \beta E(p_{t+1}/I_t) + x_t$$

où m_t^d est le logarithme de la demande de monnaie à la date t , p_t est le logarithme du prix, x_t un résumé des facteurs exogènes.

L'anticipation de p_{t+1} faite à la date t , est supposée rationnelle, c'est-à-dire égale à l'espérance conditionnelle de p_{t+1} sachant l'information I_t disponible à cette date.

L'offre de monnaie (exprimée en logarithme) est supposée exogène :

$$(2) \quad m_t^s = z_t.$$

L'écriture de la condition d'équilibre : $m_t^s = m_t^d$ permet alors de déduire une équation d'évolution des prix :

$$(3) \quad p_t = -\frac{\beta}{\alpha} E(p_{t+1}/I_t) + \frac{z_t - x_t}{\alpha}$$

où I_t est l'information contenue dans les valeurs présentes et passées des variables exogènes dans z et x .

Dans la suite, nous notons y la variable endogène, u la fonction des variables exogènes et a le coefficient structurel mesurant l'effet sur la variable endogène de l'anticipation. Le modèle d'hyperinflation est ainsi de la forme :

$$(4) \quad y_t = a E(y_{t+1}/I_t) + u_t$$

avec $I_t \supset \{u_t, u_{t-1}, \dots\}$.

1.2. Solution avant

Une méthode naturelle de résolution consiste à effectuer des remplacements récursifs en direction du futur :

$$(5) \quad \begin{cases} y_t = a E(y_{t+1}/I_t) + u_t \\ y_t = a^2 E(y_{t+2}/I_t) + a E(u_{t+1}/I_t) + u_t \\ \vdots \\ y_t = u_t + a E(u_{t+1}/I_t) + a^2 E(u_{t+2}/I_t) + \dots + a^k E(u_{t+k}/I_t) + \dots \end{cases}$$

La série obtenue n'existe pas toujours, mais lorsqu'elle existe, elle correspond à une solution du modèle (4). Une condition suffisante d'existence est par exemple que le processus exogène soit stationnaire et que le coefficient structurel soit de module inférieur à 1 : $|a| < 1$.

1.3. Solution arrière

Une résolution récursive vers le passé ne peut être menée de manière aussi directe; il faut en effet réussir à extraire la variable y_{t+1} de l'anticipation $E(y_{t+1}/I_t)$. Pour cette raison, on se restreint aux solutions à « prévisions parfaites », c'est-à-dire telles que :

$$E(y_{t+1}/I_t) = y_{t+1}$$

Sous cette condition supplémentaire, le modèle à anticipation rationnelle (4) se ramène à une équation aux différences d'ordre 1 :

$$y_t = ay_{t+1} + u_t$$

qui peut être réécrite :

$$y_{t+1} = \frac{1}{a}y_t - \frac{u_t}{a}$$

Remplaçant récursivement y_t par son expression, nous obtenons :

$$y_t = -\frac{u_{t-1}}{a} - \frac{u_{t-2}}{a^2} - \dots - \frac{u_{t-k}}{a^k} \dots$$

Cette série, lorsqu'elle existe, fournit une solution du modèle initial, pour laquelle l'anticipation à horizon 1 coïncide avec la variable à prévoir. Elle existe notamment, lorsque le processus exogène est stationnaire et le coefficient structurel de module supérieur à 1 : $|a| > 1$.

1.4. Méthode des coefficients indéterminés

Le processus exogène u admet une représentation moyenne mobile infinie inversible, fonction d'un bruit blanc indépendant ε :

$$u_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \alpha_k \varepsilon_{t-k} + \dots$$

avec $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$. Introduisant l'opérateur retard B tel que $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, cette représentation peut encore être écrite :

$$u_t = A(B)\varepsilon_t$$

avec

$$A(B) = 1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_k B^k + \dots$$

Comme la représentation est inversible l'ensemble d'information est égal à celui engendré par le bruit blanc :

$$I_t = \{u_t, u_{t-1}, \dots\} = \{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\}$$

Si nous recherchons les solutions y admettant une représentation similaire :

$$y_t = c_0 \varepsilon_t + \dots + c_k \varepsilon_{t-k} + \dots = C(B) \varepsilon_t$$

avec $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$, nous avons :

$$E(y_{t+1}/I_t) = \frac{C(B) - c_0}{B} \varepsilon_t$$

Remplaçant alors dans le modèle initial y_t , $E(y_{t+1}/I_t)$, u_t par leurs développements, nous obtenons une relation entre les « polynômes » de retard $C(B)$ et $A(B)$:

$$\begin{aligned} C(B) &= a \frac{C(B) - c_0}{B} + A(B) \\ \Leftrightarrow C(B) &= \frac{BA(B) - ac_0}{B - a} \end{aligned}$$

Les coefficients c_k du développement en série du membre de droite ne satisfaisant pas forcément la condition $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$, deux cas doivent être distingués.

i. Si $|a| < 1$, il faut pour que le développement en B existe que le coefficient structurel a soit racine du numérateur; ceci est vrai si $c_0 = A(a)$. Il y a alors une solution unique admettant une représentation moyenne mobile infinie. Cette solution donnée par :

$$y_t = \frac{BA(B) - aA(a)}{B - a} \varepsilon_t$$

n'est autre que la solution avant du modèle, puisque :

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{BA(B) - aA(a)}{B - a} \varepsilon_t = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{B^{k+1} - a^{k+1}}{B - a} \right] \varepsilon_t \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=0}^k B^j a^{k-j} \right] \varepsilon_t \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} B^j \sum_{k \geq j} \alpha_k a^{k-j} \right] \varepsilon_t \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} B^j \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+j} a^k \right] \varepsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{k+j} B^j \right] \varepsilon_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k E(u_{t+k}/I_t) \end{aligned}$$

ii. Si $|a| > 1$, le développement en série existe pour toute valeur du coefficient c_0 . Nous obtenons une infinité de solution moyennes mobiles; elles sont de la forme :

$$y_t = \frac{BA(B) - ac_0}{B - a} \varepsilon_t \quad \text{avec } c_0 \in \mathbb{R}$$

Effectuant un changement de paramètre, il est facile de voir que ces solutions s'écrivent comme combinaisons de la solution avant :

$$y_t^0 = \frac{BA(B) - aA(a)}{B - a} \varepsilon_t$$

et de la solution arrière :

$$y_t^1 = \frac{BA(B)}{B - a} \varepsilon_t$$

Cette méthode de résolution, qui se restreint à des solutions de forme particulière, permet de voir qu'il y a en général une infinité de processus satisfaisant le modèle.

1.5. Résolution de l'équation homogène

L'approche suivie par GOURIEROUX-LAFFONT-MONFORT [1982] est similaire à celle habituellement utilisée pour résoudre les équations de récurrence linéaires. Il est d'abord possible de montrer que la solution générale du modèle se décompose en :

$$y_t = y_t^{0*} + y_t^{**}$$

où y_t^{0*} est une solution particulière du modèle et où y_t^{**} est la solution générale de l'« équation homogène », obtenue en remplaçant par 0 le processus exogène :

$$y_t^{**} = a E[y_{t+1}^{**} / I_t]$$

Pour obtenir les solutions de cette équation, il suffit de remarquer que le processus : $M_t = a^t y_t^{**}$ est tel que l'anticipation rationnelle coïncide avec la dernière valeur :

$$E[M_{t+1} / I_t] = M_t$$

Un tel processus est appelé *martingale*.

La solution générale du modèle est donc de la forme :

$$(6) \quad y_t = y_t^{0*} + \frac{1}{a^t} M_t$$

où y_t^{0*} est une solution particulière et M une martingale arbitraire.

Selon la valeur du coefficient structurel a , il est possible de choisir comme solution particulière la solution avant ($|a| < 1$) ou la solution arrière ($|a| > 1$). Nous voyons donc que le modèle admet autant de solutions qu'il y a de choix possibles d'une martingale arbitraire.

Bien que la méthode de résolution soit analogue à celle utilisée pour les équations aux différences, il existe une différence fondamentale entre le modèle à anticipation rationnelle et une telle équation. Il existe en effet une infinité de solutions prenant les mêmes valeurs avant une date donnée t_0 . Ainsi la fixation de conditions initiales ne permet pas de caractériser une solution.

1.6. Méthode des processus de révision

Sur l'exemple simple du modèle d'hyperinflation, il est facile de présenter la méthode que nous discuterons en détails dans la section 2. Il s'agit en fait d'une méthode de résolution arrière dans laquelle on ne suppose pas les anticipations parfaites.

Notons ε^0 le processus des erreurs de prévision (à horizon 1) :

$$(7) \quad \varepsilon_t^0 = y_t - E(y_t / I_{t-1})$$

Ce processus est fonction de l'information I_t et est orthogonal au passé : $E(\varepsilon_t^0 / I_{t-1}) = 0$. Un processus possédant ces propriétés est appelé *différence de martingale*.

Remplaçant dans le modèle initial la prévision par son expression en fonction de la réalisation y et de l'erreur ε^0 , nous voyons qu'une solution satisfait nécessairement une équation du type :

$$\begin{aligned} y_t &= a(y_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^0) + u_t \\ \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{a}y_{t-1} - \frac{1}{a}u_{t-1} + \varepsilon_t^0 \end{aligned}$$

où ε^0 est une différence de martingale.

Le résultat important est qu'en fait cette condition est aussi suffisante.

PROPRIÉTÉ 1 : Les solutions du modèle $y_t = a E(y_{t+1} / I_t) + u_t$ s'obtiennent en considérant les solutions de l'équation de récurrence :

$$y_t = \frac{1}{a}y_{t-1} - \frac{1}{a}u_{t-1} + \varepsilon_t^0$$

pour tous les choix possibles d'une différence de martingale ε^0 .

Preuve : En effet si ε^0 est une différence de martingale arbitraire et si y satisfait l'équation aux différences

$$y_t = \frac{1}{a}y_{t-1} - \frac{1}{a}u_{t-1} + \varepsilon_t^0,$$

nous avons :

$$E(y_t / I_{t-1}) = \frac{1}{a}y_{t-1} - \frac{1}{a}u_{t-1}$$

et donc

$$y_t - E(y_t / I_{t-1}) = \varepsilon_t^0.$$

Nous retrouvons l'interprétation souhaitée de ε^0 en terme d'erreur de prévision. Il suffit alors de remplacer ε^0 par cette forme obligée dans l'équation aux différences pour voir que y est solution du modèle à anticipation rationnelle.

C.Q.F.D.

Ce dernier mode de résolution permet de distinguer deux causes de multiplicité des solutions :

i. La dynamique du modèle conduit à une équation de récurrence linéaire d'ordre 1, dans laquelle la valeur présente y_t est fonction de la valeur retardée y_{t-1} . Cette multiplicité peut comme d'habitude être éliminée par la donnée d'une condition initiale.

ii. L'autre cause de multiplicité vient de la possibilité de choix du second membre de l'équation aux différences. Elle s'explique par le fait que la valeur d'équilibre y_t de la date t est connue lorsque l'anticipation $E(y_{t+1}/I_t)$ est connue; il y a alors libre choix de l'erreur de prévision $y_{t+1} - E(y_{t+1}/I_t)$ pour atteindre l'équilibre de la date suivante.

La méthode fondée sur les processus de révision se révèle bien adaptée à la recherche des solutions moyennes mobiles. Supposons que le processus exogène admette la représentation $u_t = A(B)\varepsilon_t$ et intéressons-nous aux solutions de même forme : $y_t = C(B)\varepsilon_t$.

L'erreur de prévision $\varepsilon_t^0 = y_t - E(y_t/I_{t-1})$ est nécessairement proportionnelle au bruit blanc ε_t :

$$\varepsilon_t^0 = c_0 \varepsilon_t$$

Les solutions moyennes mobiles s'écrivent donc nécessairement :

$$y_t = \frac{1}{a} y_{t-1} - \frac{1}{a} u_{t-1} + c_0 \varepsilon_t$$

$$y_t = \frac{-(1/a)BA(B) + c_0}{1 - (1/a)B} \varepsilon_t = \frac{BA(B) - ac_0}{B - a} \varepsilon_t$$

Il faut évidemment, comme en 1.4, distinguer alors plusieurs cas selon la position de $|a|$ par rapport à 1. Le paramètre supplémentaire c_0 , servant à décrire l'ensemble des solutions moyennes mobiles en ε , admet une interprétation statistique simple, qui peut être utilisée dans une phase d'estimation. Ce paramètre est égal au coefficient de régression de l'erreur de prévision en $y : y_t - E(y_t/I_{t-1})$ sur l'erreur de prévision en $u : u_t - E(u_t/I_{t-1})$. Lorsqu'on admet *a priori* que les observations $y_1, \dots, y_T$ correspondent à une solution moyenne mobile, c_0 peut par exemple être estimé de manière convergente selon la procédure suivante :

i. Une approximation convergente ${}_t\tilde{y}_{t+1}$ de $E(y_{t+1}/I_t)$ est déduite d'une autorégression de y_{t+1} sur $y_t, y_{t-1}, \dots$:

$${}_t\tilde{y}_{t+1} = \sum_{k=0}^{k_t} \hat{c}_{t,T} y_{t-k}$$

ii. Si le coefficient structurel a est identifiable et estimable de manière convergente par $\hat{a}_T$, il est possible de construire les résidus : $\tilde{u}_t = y_t - \hat{a}_{T,t} {}_t\tilde{y}_{t+1}$; ils constituent des approximations convergentes des u_t .

iii. L'anticipation $E(u_t/I_{t-1})$ est alors approchée au moyen d'une autorégression de $\tilde{u}_t$ sur les valeurs passées $\tilde{u}_{t-1} \tilde{u}_{t-2} \dots$.

iv. Si cette dernière approximation est notée ${}_{t-1}\tilde{u}_t$, le paramètre c_0 peut être estimé de manière convergente en régressant $y_t - {}_{t-1}y_t$ sur $\tilde{u}_t - {}_{t-1}\tilde{u}_t$.

Cette procédure d'estimation montre en particulier que l'identification (asymptotique) du coefficient structurel a implique celle du paramètre supplémentaire c_0 .

La méthode de résolution fondée sur le processus de révision permet aussi d'obtenir des résultats concernant les solutions stationnaires non linéaires. Considérons pour simplifier le cas où $u_t = \varepsilon_t$ est un bruit blanc indépendant et où $|a| > 1$. Étant donnée une fonction arbitraire f , pour laquelle $E f(\varepsilon_t)$ existe, le processus $\varepsilon_t^0 = f(\varepsilon_t) - E f(\varepsilon_t)$ est une différence de martingale. Le processus défini par :

$$y_t = \frac{1}{1 - (B/a)} \left[-\frac{1}{a} \varepsilon_{t-1} + f(\varepsilon_t) - E f(\varepsilon_t) \right]$$

est alors solution du modèle. Il s'agit d'un processus stationnaire, qui a généralement une expression non linéaire en ε . Il existe ainsi beaucoup de solutions stationnaires autres que celles admettant une représentation moyenne mobile en ε . Comme la fonction d'autocorrélation de $-(1/a)\varepsilon_{t-1} + f(\varepsilon_t) - E f(\varepsilon_t)$ s'annule à partir de l'ordre deux, il existe un bruit blanc η_t tel que :

$$-\frac{1}{a} \varepsilon_{t-1} + f(\varepsilon_t) - E f(\varepsilon_t) = \eta_t - \theta \eta_{t-1}.$$

Toutes les solutions que nous venons d'obtenir admettent ainsi une représentation ARMA (1,1); elles sont linéaires dans un bruit blanc η , qui n'est pas le bruit blanc associé au processus exogène. Ce bruit blanc n'est pas indépendant en général, mais est seulement non corrélé.

2 Méthode fondée sur les processus de révision

2.1. Le modèle

Nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter dans le cas général la dernière méthode de résolution décrite en 1.6. Le modèle considéré est un modèle linéaire unidimensionnel dans lequel la variable endogène est exprimée en fonction de diverses anticipations, de ses valeurs retardées et de certaines variables exogènes; il s'écrit :

$$(8) \quad y_t = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H a_{kh} E(y_{t+h-k}/I_{t-k}) + \sum_{k=1}^K a_{k0} y_{t-k} + u_t$$

où (I_t) est une famille croissante d'ensembles d'information avec $I_t \supset \{u_t, u_{t-1}, \dots\}$.

Les indices sont choisis pour faire apparaître l'horizon h de la prévision et la date $t-k$ à laquelle elle est faite.

Nous supposons que parmi les coefficients $a_{k,h}$, $k=0, \dots, K$ (resp. $a_{k,h}$, $h=0, \dots, H$) l'un au moins est non nul; les valeurs maximales H et K sont alors définies sans ambiguïté. H s'interprète comme la plus grande valeur de l'horizon d'anticipation apparaissant dans le modèle. Le membre de droite de l'équation (8) contient aussi bien des anticipations de variables futures faites à la date présente [comme $E(y_{t+1}/I_t)$] que des anticipations de variables futures faites dans le passé [comme $E(y_{t+1}/I_{t-1})$] ou d'anciennes anticipations ($E(y_{t-1}/I_{t-2})$).

Il est intéressant pour la suite de faire apparaître les indices des variables à prévoir. Le modèle (8) s'écrit de manière équivalente :

$$(9) \quad y_t = \sum_{(k,j) \in \mathcal{A}} a_{k,j+k} E(y_{t+j}/I_{t-k}) + u_t$$

avec : $\mathcal{A} = \{(k, h-k), h=\{0, 1, \dots, H\}, k=\{0, 1, \dots, K\}\}$, où $a_{00}=0$.

2.2. Processus de révision

Ils sont définis comme les différences de deux prévisions successives du processus y :

$$(10) \quad \varepsilon_t^j = E(y_{t+j}/I_t) - E(y_{t+j}/I_{t-1}), \quad j \geq 0$$

Ce sont les valeurs de ces processus qui interviennent dans la mise à jour des prévisions.

Pour $j=0$, nous retrouvons l'erreur de prévision :

$$\varepsilon_t^0 = y_t - E(y_t/I_{t-1}),$$

pour $j=1$, la différence entre les prévisions faites en t et $t-1$:

$$\varepsilon_t^1 = E(y_{t+1}/I_t) - E(y_{t+1}/I_{t-1}),$$

c'est-à-dire l'erreur de prévision sur la prévision :

$$\varepsilon_t^1 = E(y_{t+1}/I_t) - E(E(y_{t+1}/I_t)/I_{t-1})$$

Ces divers processus sont fonctions de l'information :

$$\varepsilon_t^j \in I_t, \quad \forall j \geq 0, \quad \forall t$$

et sont orthogonaux au passé :

$$E(\varepsilon_t^j/I_{t-1}) = 0, \quad \forall j \geq 0, \quad \forall t$$

Il s'agit donc de différences de martingale.

L'erreur de prévision pour prévoir à l'horizon h :

$$v_{t,h} = y_t - E(y_t/I_{t-h}), \quad h \geq 1$$

peut facilement s'exprimer en fonction des processus de révision. Une décomposition récursive de $v_{t,h}$ conduit à :

$$\begin{aligned}
 v_{t,h} &= y_t - E(y_t/I_{t-1}) \\
 &\quad + E(y_t/I_{t-1}) - E(y_t/I_{t-2}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + E(y_t/I_{t-h-1}) - E(y_t/I_{t-h}) \\
 &= \varepsilon_t^0 + \varepsilon_{t-1}^1 + \dots + \varepsilon_{t-h+1}^{h-1} \\
 (11) \quad v_{t,h} &= y_t - E(y_t/I_{t-h}) = \sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon_{t-j}^j, \quad h \geq 1,
 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier, où le processus y est régulier : $\lim_{h \rightarrow \infty} E(y_t/I_{t-h}) = 0$, nous obtenons :

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_{t-j}^j$$

L'ensemble des processus réguliers peut ainsi être décrit par l'intermédiaire d'une infinité de différences de martingales arbitraires.

2.3. Une condition nécessaire

Remplaçant dans le modèle à anticipations rationnelles (8), les anticipations en fonction des réalisations et des processus de révision, nous obtenons :

$$y_t = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H a_{kh} \left[y_{t+h-k} - \sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon_{t+h-k-j}^j \right] + \sum_{k=1}^K a_{k0} y_{t-k} + u_t.$$

Faisant figurer dans le membre de gauche les termes en y , nous avons :

$$(12) \quad \sum_{j=J_0}^{J_1} a_j^* y_{t+j} = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H a_{kh} \sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon_{t+h-k-j}^j - u_t$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_j^* &= \sum_{k:(k,j) \in \mathcal{A}} a_{k,j+k}, \quad j \neq 0 \\
 a_0^* &= -1 + \sum_{k:(k,0) \in \mathcal{A}} a_{kk}
 \end{aligned}$$

J_0 et J_1 désignent respectivement les plus petit et plus grand indices pour lesquels a_j^* est non nul.

Nous voyons qu'une condition nécessaire pour que le processus y soit solution est qu'il satisfasse l'équation de récurrence (12), d'ordre $J_1 - J_0$, dont le second membre dépend de H différences de martingales : $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{H-1}$. La question est de savoir si inversement toute solution de (12) correspondant à un choix arbitraire des différences de martingales $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{H-1}$ est aussi solution du modèle à anticipations rationnelles initial.

2.4. Contraintes sur les processus de révision

Comme nous allons le voir la réponse à cette question est généralement négative, les processus de révision pouvant être soumis à certaines contraintes. Pour illustrer ce problème, considérons le cas $H=K=2$. Le modèle est :

$$\begin{aligned} y_t = & a_{01} E(y_{t+1}/I_t) + a_{02} E(y_{t+2}/I_t) \\ & + a_{11} E(y_t/I_{t-1}) + a_{12} E(y_{t+1}/I_{t-1}) \\ & + a_{21} E(y_{t-1}/I_{t-2}) + a_{22} E(y_t/I_{t-2}) \\ & + a_{10} y_{t-1} + a_{20} y_{t-2} + u_t \end{aligned}$$

Les deux différences de martingales apparaissant dans l'équation aux différences associées sont ε^0 et ε^1 .

Prenant l'espérance de chaque membre par rapport à I_{t-1} et retranchant de l'équation initiale, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_t - E(y_t/I_{t-1}) = & a_{01} [E(y_{t+1}/I_t) - E(y_{t+1}/I_{t-1})] \\ & + a_{02} [E(y_{t+2}/I_t) - E(y_{t+2}/I_{t-1})] \\ & + u_t - E(u_t/I_{t-1}) \end{aligned}$$

Comme $a_2^* = a_{02}$, ceci est équivalent à :

$$(13) \quad \varepsilon_t^0 = a_2^* \varepsilon_t^2 + a_{01} \varepsilon_t^1 + u_t - E(u_t/I_{t-1}).$$

Un calcul similaire effectué pour obtenir

$$\varepsilon_t^1 = E(y_{t+1}/I_t) - E(y_{t+1}/I_{t-1})$$

conduit à :

$$(14) \quad \varepsilon_t^1 = a_2^* \varepsilon_t^3 + a_1^* \varepsilon_t^2 + a_{11} \varepsilon_t^1 + a_{10} \varepsilon_t^0 + E(u_{t+1}/I_t) - E(u_{t+1}/I_{t-1}).$$

Le même type de calcul peut aussi être fait pour les ordres supérieurs, mais donnerait alors une expression de processus de révision n'intervenant pas dans l'équation aux différences.

Les équations (13) et (14) permettent d'exprimer ε^0 et ε^1 en fonction de processus ε^2 et ε^3 .

Plusieurs cas doivent alors intuitivement être distingués :

i. Si $a_2^* \neq 0$, les processus supplémentaires ε^2 ou ε^3 interviennent dans chacune des équations. Ces équations n'entraînent pas de contrainte sur ε^0 et ε^1 .

ii. Si $a_2^* = 0$, $a_1^* \neq 0$, la première équation devient :

$$\varepsilon_t^0 = a_{01} \varepsilon_t^1 + u_t - E(u_t/I_{t-1})$$

et implique une contrainte entre ε^0 et ε^1 . La seconde équation contient ε^2 et n'entraîne pas de contrainte supplémentaire.

Remarquons que la contrainte permet d'exprimer le processus de révision d'indice le plus faible ε^0 en fonction de celui d'indice le plus grand ε^1 (ceci pour toute valeur de a_{01}).

iii. Finalement si $a_2^* = a_1^* = 0$, il y a deux contraintes effectives sur ε^0 et ε^1 :

$$\begin{cases} \varepsilon_t^0 = u_t - E(u_t/I_{t-1}) \\ \varepsilon_t^1 = a_{11} \varepsilon_t^1 + a_{10} \varepsilon_t^0 + E(u_{t+1}/I_t) - E(u_{t+1}/I_{t-1}) \end{cases}$$

Il apparaîtra dans le résultat général donné au paragraphe suivant que ces contraintes sont les seules qu'il est nécessaire d'imposer aux processus de révision.

2.5. Résultat général

Nous supposons que les coefficients a_{kh} peuvent seulement être soumis à des contraintes de nullité et nous considérons des propriétés génériques, c'est-à-dire valables pour presque tout point de l'ensemble des paramètres non contraints.

THÉORÈME 2 : Les solutions du modèle à anticipations rationnelles :

$$y_t = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H a_{kh} E(y_{t+h-k}/I_{t-k}) + \sum_{k=1}^K a_{k0} y_{t-k} + u_t$$

sont obtenues en considérant les solutions des équations aux différences :

$$\sum_{j=J_0}^{J_1} a_j^* y_{t+j} = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H a_{kh} \sum_{j=0}^{h-1} \varepsilon_{t+h-k-j}^j - u_t$$

où $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{H-1}$ sont H différences de martingales soumises aux $H-J_1$ contraintes :

$$\varepsilon_t^j = \sum_{k=0}^K \sum_{h=0}^H a_{kh} \varepsilon_t^{h-k+j} + E(u_{t+j}/I_t) - E(u_{t+j}/I_{t-1}),$$

$$j = 0, \dots, H-J_1-1.$$

Il est possible de choisir de manière arbitraire les J_1 derniers processus de révision : $\varepsilon^{H-J_1}, \dots, \varepsilon^{H-1}$ et d'exprimer les $H-J_1$ premiers $\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^{H-J_1-1}$ en fonction des J_1 derniers.

Preuve : Voir BROZE, GOURIEROUX et SZAFARZ [1984] et BROZE et SZAFARZ [1985].

En particulier, nous obtenons les corollaires suivants :

COROLLAIRE 3 : Le nombre de différences de martingale arbitraires est égal à J_1 , c'est-à-dire correspond à l'indice maximal des variables à prévoir (y_{t+J_1}).

COROLLAIRE 4 : *La solution peut être caractérisée par un nombre fini de conditions initiales si et seulement si le second membre de l'équation aux différences est parfaitement déterminé, c'est-à-dire si $J_1 = 0$. Les modèles correspondants s'écrivent :*

$$y_t = \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^k a_{kh} E[y_{t+h-k}/I_{t-k}] + \sum_{k=0}^K a_{k0} y_{t-k} + u_t$$

Ce sont des modèles appartenant à cette catégorie qui ont par exemple été étudiés par VISCO [1981].

COROLLAIRE 5 : *Le modèle à anticipations rationnelles admet une solution unique, si et seulement si les deux causes de multiplicité disparaissent, c'est-à-dire si $J_0 = J_1 = 0$.*

Ces modèles sont de la forme :

$$y_t = \sum_{k=1}^K a_{kk} E(y_t/I_{t-k}) + u_t$$

Ils correspondent à la généralisation directe du modèle de MUTH [1961] dans laquelle interviennent seulement des anticipations de la variable présente. Ce type de modèle a été notamment examiné par WALLIS [1980] dans le cas multidimensionnel.

3 Recherche de solutions particulières

3.1. Solutions en anticipations parfaites

La méthode de résolution arrière peut être appliquée si, en remplaçant les anticipations apparaissant dans le modèle par la valeur de la variable à prévoir, les solutions de l'équation aux différences ainsi obtenue sont aussi solutions du modèle initial. La condition d'anticipations parfaites s'écrit donc :

$$y_{t+j} - E(y_{t+j}/I_{t-1}) = 0, \quad j=0, \dots, H-1$$

ou de manière équivalente :

$$\varepsilon_t^j = 0, \quad j=0, \dots, H-1$$

Considérant la forme particulière des $H - J_1$ contraintes sur les processus de révision, nous déduisons directement la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6 : Supposons le processus u non prédéterminé : $u_t \neq E(u_t/I_{t-1})$; il existe une solution en anticipations parfaites si et seulement si il est possible de choisir $\varepsilon^0 = \dots = \varepsilon^{H-1} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : $H = J_1$.

Ces solutions en anticipations parfaites ne sont pas forcément stationnaires. Ainsi dans l'exemple de la section 1 l'existence d'une telle solution stationnaire dépendait de la valeur du coefficient structurel a .

3.2. Solutions linéaires stationnaires

Lorsque le processus exogène admet une représentation moyenne-mobile : $u_t = A(B)\varepsilon_t$, les solutions de même forme : $y_t = C(B)\varepsilon_t$ sont obtenues en imposant aux processus de révision d'être proportionnels au bruit ε_t :

$$\varepsilon_t^j = c_j \varepsilon_t, \quad j=0, \dots, H-1$$

Les coefficients c_j sont évidemment contraints par les $H-J_1$ contraintes entre processus de révision. Ils doivent aussi être choisis de manière que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$ et pour cela il faut éliminer les racines de la partie autorégressive de l'équation aux différences, qui ne se trouvent pas à l'extérieur du disque unité. Chaque racine à éliminer fait diminuer d'une unité la dimension de l'ensemble des solutions linéaires stationnaires.

PROPRIÉTÉ 7 : Soit N le nombre de racines du polynôme autorégressif J_1
 $\sum_{j=J_0} a_j^* B^j$ ne se trouvant pas à l'extérieur du disque unité. Si $J_1 - N \geq 0$, l'ensemble des solutions linéaires stationnaires est de dimension $J_1 - N$.

Si $J_1 - N < 0$, il n'y a pas de solution linéaire stationnaire.

Preuve : Voir BROZE, GOURIEROUX et SZAFARZ [1984].

COROLLAIRE 8 : Le modèle admet une solution linéaire stationnaire unique si et seulement si : $J_1 = N$.

Les paramètres c_j , $j=0, \dots, H-1$ servant à caractériser les solutions linéaires stationnaires s'interprètent comme les coefficients de régression de $E(y_{t+j}/I_t) - E(y_{t+j}/I_{t-1})$ sur $u_t - E(u_t/I_{t-1})$. La généralisation directe de la démarche d'estimation discutée en 1.6 permet alors d'obtenir le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 9 : Sous l'hypothèse que la solution est linéaire stationnaire, l'identifiabilité (asymptotique) des coefficients a_{kh} , $k=0, \dots, K$, $h=0, \dots, H$ entraîne l'identifiabilité (asymptotique) des coefficients supplémentaires $c_0 \dots c_{H-1}$.

4 Exemples

Afin d'illustrer les résultats précédents et de montrer qu'ils sont d'utilisation simple, nous allons considérer quelques modèles particuliers. Les coefficients figurant explicitement sont ceux non soumis à contrainte de nullité.

Exemple 1

Une généralisation directe du modèle d'hyperinflation consiste à prendre en compte des variables retardées. Ceci conduit à un modèle du type :

$$y_t = a E(y_{t+1}/I_t) + by_{t-1} + u_t$$

L'horizon maximal est $H=1$ et l'équation aux différences ne fait donc intervenir qu'une seule différence de martingale ε^0 . Comme $J_1=1$ est égal à H , le processus ε^0 peut être choisi arbitraire. Les solutions sont donc obtenues en résolvant :

$$\begin{aligned} y_t &= a(y_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^0) + by_{t-1} + u_t \\ \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{a}y_{t-1} - \frac{b}{a}y_{t-2} - \frac{1}{a}u_{t-1} + \varepsilon_t^0 \end{aligned}$$

où ε^0 est une différence de martingale arbitraire.

Le polynôme autorégressif de degré 2 est : $-a + B - bB^2$.

Supposons que le processus exogène u admette une représentation moyenne mobile : $u_t = A(B)\varepsilon_t$.

i. Si le polynôme autorégressif a ses deux racines à l'extérieur du disque unité, l'ensemble des solutions linéaires stationnaires est de dimension 1. Celles-ci s'écrivent :

$$y_t = \frac{1}{-a + B - bB^2} \{ u_{t-1} + c_0 [u_t - E(u_t/I_{t-1})] \} = \frac{BA(B) + c_0}{-a + B - bB^2} \varepsilon_t$$

où c_0 est un réel quelconque.

ii. Si le polynôme autorégressif a une racine et une seule λ_1 à l'intérieur du disque unité, il y a une seule solution linéaire stationnaire. Celle-ci est obtenue en choisissant c_0 de manière que le numérateur admette comme racine λ_1 . On obtient : $c_0 = -\lambda_1 A(\lambda_1)$ et la solution admet la représentation :

$$y_t = \frac{BA(B) - \lambda_1 A(\lambda_1)}{-a + B - bB^2} \varepsilon_t$$

iii. Finalement, si les deux racines du polynôme autorégressif sont à l'intérieur du disque unité, il n'y a pas de solution linéaire stationnaire.

Exemple 2

Une autre généralisation possible du modèle d'hyperinflation consiste à calculer l'anticipation à la date $t-1$. Il n'y a plus alors simultanéité entre le moment auquel est fixée la valeur de la variable endogène et la date à laquelle est faite l'anticipation. Un tel modèle s'écrit :

$$y_t = a E(y_{t+1}/I_{t-1}) + u_t$$

L'horizon d'anticipation est $H=2$ et est strictement supérieur à l'indice maximal $J_1=1$ de la variable à prévoir. L'équation aux différences fait intervenir deux différences de martingales ε^0 et ε^1 ; elle est donnée par :

$$\begin{aligned} y_t &= a(y_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^0 - \varepsilon_t^1) + u_t \\ \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{a} y_{t-1} - \frac{1}{a} u_{t-1} + \varepsilon_t^0 + \varepsilon_{t-1}^1 \end{aligned}$$

Les processus ε^0 et ε^1 sont soumis à $H-J_1=1$ contrainte. Celle-ci est : $\varepsilon_t^0 = u_t - E(u_t/I_{t-1})$.

Il suffit donc pour trouver les solutions de résoudre :

$$y_t = \frac{1}{a} y_{t-1} - \frac{1}{a} u_{t-1} + u_t - E(u_t/I_{t-1}) + \varepsilon_{t-1}^1$$

où ε^1 est une différence de martingale arbitraire.

Exemple 3

EVANS-HONKAPOHJA [1984] ont considéré un modèle, où n'interviennent que des anticipations faites à la date $t-1$ et où le processus exogène est un bruit blanc indépendant : $u_t = \varepsilon_t$. Ce modèle s'écrit :

$$y_t = \sum_{i=0}^L a_i E(y_{t+i}/I_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad a_L \neq 0$$

L'horizon maximal est $H=L+1$ et l'indice maximal est $J_1=L$. Il y a donc $H-J_1=1$ contrainte, donnée par : $\varepsilon_t^0 = \varepsilon_t$ et les autres processus de révision $\varepsilon^1 \dots \varepsilon^L$ peuvent être choisis arbitrairement. L'équation aux différences s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 (y_t - \varepsilon_t^0) + a_1 (y_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^0 - \varepsilon_t^1) + \dots \\ &\quad + a_L (y_{t+L} - \varepsilon_{t+L}^0 - \varepsilon_{t+L-1}^1 - \dots - \varepsilon_t^L) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_t^0 = \varepsilon_t$.

Supposons alors que la partie autorégressive ait toutes ses racines à l'extérieur du disque unité et intéressons-nous aux solutions linéaires stationnaires. Celles-ci sont obtenues en prenant $\varepsilon_t^j = c_j \varepsilon_t$, $j=1, \dots, L$.

Remplaçant dans l'équation aux différences, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_L y_{t+L} + \dots + a_1 y_{t+1} + (a_0 - 1) y_t \\ = a_0 \varepsilon_t + a_1 (\varepsilon_{t+1} + c_1 \varepsilon_t) + a_2 (\varepsilon_{t+2} + c_1 \varepsilon_{t+1} + c_2 \varepsilon_t) + \dots \\ + a_L (\varepsilon_{t+L} + c_1 \varepsilon_{t+L-1} + \dots + c_L \varepsilon_t) - \varepsilon_t \\ = a_L \varepsilon_{t+L} + (a_{L-1} + c_1 a_L) \varepsilon_{t+L-1} + (a_{L-2} + c_1 a_{L-1} + c_2 a_L) \varepsilon_{t+L-2} + \dots \\ + (a_0 - 1 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_L c_L) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Les coefficients $c_1, \dots, c_L$ étant arbitraires et l'application qui à $c_1, \dots, c_L$ fait correspondre les facteurs

$$\begin{aligned} & a_{L-1} + c_1 a_L, \\ & a_{L-2} + c_1 a_{L-1} + c_2 a_L, \dots, \\ & a_0 - 1 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_L c_L \end{aligned}$$

étant linéaire inversible, il revient au même d'écrire :

$$y_{t+L} + \dots + \frac{a_1}{a_L} y_{t+1} + \frac{a_0 - 1}{a_L} y_t = \varepsilon_{t+L} + \theta_1 \varepsilon_{t+L-1} + \dots + \theta_L \varepsilon_t$$

où $\theta_1, \dots, \theta_L$ sont arbitraires.

Les solutions linéaires stationnaires sont donc tous les processus ARMA(L, L) fondés sur le bruit blanc ε_t , dont le polynôme autorégressif est fixé égal à :

$$1 + \frac{a_{L-1}}{a_L} B + \dots + \frac{a_1}{a_L} B^{L-1} + \frac{a_0 - 1}{a_L} B^L,$$

et dont la partie moyenne mobile est arbitraire.

● Références bibliographiques

- BLANCHARD, O. J. (1979). — « Backward and Forward Solutions for Economies with Rational Expectations », *Economic Review, Papers and Proceedings*, 69, p. 114-118.
- BROZE, L., GOURIEROUX, C. et SZAFARZ, A. (1984). — « Solutions of Dynamic Linear Rational Expectations Models », *discussion paper*, n° 8421, CEPREMAP.
- BROZE, L. et SZAFARZ, A. (1985). — « Forme réduite d'un modèle général à anticipations rationnelles », à paraître dans les *Cahiers du CERO*.
- EVANS, G. et HONKAPOHJA, S. (1984). — « A Complete Characterization of ARMA Solutions to Linear Rational Expectations Models », *Discussion Paper*, n° 209, Université d'Helsinki.
- GOURIEROUX, C., LAFFONT, J. J. et MONFORT, A. (1982). — « Rational Expectations in Dynamic Linear Models: Analysis of the Solutions », *Econometrica*, 50, p. 409-425.
- MACCALLUM, B. T. (1976). — « Rational Expectations and the Estimation of Econometric Models: an Alternative Procedure », *International Economic Review*, 17, p. 484-490.
- MUTH, J. (1961). — « Rational Expectations and Theory of Price Movements », *Econometrica*, 29, p. 315-335.
- PESARAN, M. (1981). — « Identification of Rational Expectations Models », *Journal of Econometrics*, 16, p. 375-398.
- SHILLER, R. (1978). — « Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models », *Journal of Monetary Economics*, 4, p. 1-44.

- TAYLOR, J. (1977). — « Conditions for Unique Solution in Stochastic Macroeconomic Models with Rational Expectations », *Econometrica*, 45, p. 1377-1387.
- VISCO, I. (1981). — « On the Derivation of Reduced Forms of Rational Expectations Models », *European Economic Review*, 16, p. 355-365.
- WALLIS, K. (1980). — « Econometric Implications of the Rational Expectations Hypothesis », *Econometrica*, 48, p. 49-73.
- WEGGE, L. (1984). — « Identifiability of Structural Models Containing Muth-rational Current and Future Expectations », *Working Paper n° 233*, University of California.

Summary

Solutions of Dynamic Linear Rational Expectations Models

Laurence BROZE and Ariane SZAFARZ

Linear rational expectations models generally have a large number of solutions. It is thus important to describe them exhaustively in order to study their properties and subsequently estimate which solution fits best the data. In this paper, a global approach is suggested allowing a simultaneous treatment of all possible cases. We show how the method may be applied to determine the set of stationary solutions admitting an infinite moving average representation and we give a natural parametrization of this set and discuss the exact number of independent parameters.

Reseña

Soluciones para un modelo dinámico lineal con anticipaciones racionales

Laurence BROZE y Ariane SZAFARZ

Presentamos un trámite que permite conseguir el conjunto de todas las soluciones de un modelo lineal con anticipaciones racionales cualesquiera. Este enfoque hace desempeñar un papel fundamental a los procesos de revisión que intervienen en la puesta al día de las previsiones. Resulta que el conjunto de las soluciones puede describirse mediante un número de combinaciones arbitrarias, número igual al índice mayor de las variables que se han de prever. Este enfoque se revela especialmente adaptado a la búsqueda de solución que comporta una representación media móvil.