



Université Libre de Bruxelles

Université de Liège

*Ecole Polytechnique de Bruxelles*

*Faculté des Sciences Appliquées*

Formation doctorale en Sciences de  
l'ingénieur et technologie

Collège de doctorat en Électricité,  
électronique et informatique

# **Energy-Based Magnetic Hysteresis Models**

**Theoretical Development and  
Finite Element Formulations**

Doctoral Dissertation presented by

Kevin JACQUES

in fulfillment of the requirements for the degree of  
*Docteur en Sciences de l'Ingénieur*

November 2018



## Thesis committee:

Prof. Christophe GEUZAINÉ (Université de Liège), Advisor  
Prof. Johan GYSELINCK (Université Libre de Bruxelles), Advisor  
Dr. Zacharie DE GREVE (Université de Mons)  
Prof. François HENROTTE (Université Catholique de Louvain - Université de Liège)  
Prof. Artem NAPOV (Université Libre de Bruxelles)  
Prof. Afef KEDOUS LÉBOUC (CNRS, G2Elab - Université Grenoble Alpes)  
Prof. Paavo RASILO (Tampere University of Technology)  
Prof. Benoît VANDERHEYDEN (Université de Liège), President

## Author contact information:

### Kevin Jacques

BEAMS - Bio Electro and  
Mechanical Systems,  
Dept. of Engineering,  
Université Libre de Bruxelles

Campus du Solbosch, Bâtiment L,  
Av. F. Roosevelt 50,  
1050 Brussels, Belgium

Email: [Kevin.Jacques@ulb.ac.be](mailto:Kevin.Jacques@ulb.ac.be)

ACE - Applied and Computational  
Electromagnetics,  
Dept. of Electrical Engineering and  
Computer Science,  
University of Liège

Montefiore Institute B28,  
Quartier Polytech 1,  
Allée de la Découverte 10,  
4000 Liège, Belgium

Email: [Kevin.Jacques@uliege.be](mailto:Kevin.Jacques@uliege.be)

## Funding:

This work was supported in part by the Belgian Science Policy under grant IAP P7/02 and the Walloon Region of Belgium under grant RW-1217703 (WBGreen FEDO).

Computational resources have been provided by the Consortium des Équipements de Calcul Intensif (CÉCI), funded by the Fonds de la Recherche Scientifique de Belgique (F.R.S.-FNRS) under Grant No. 2.5020.11.



## ***Abstract***

This work focuses on the development of a highly accurate energy-based hysteresis model for the modeling of magnetic hysteresis phenomena. The model relies on an explicit representation of the magnetic pinning effect as a dry friction-like force acting on the magnetic polarization. Unlike Preisach and Jiles-Atherton models, this model is vectorial from the beginning and derives from thermodynamic first principles.

Three approaches are considered: the first one, called vector play model, relies on a simplification that allows an explicit, and thus fast, update rule, while the two others, called the variational and the differential approaches, avoid this simplification, but require a non-linear equation to be solved iteratively. The vector play model and the variational approach were already used by other researchers, whereas the differential approach introduced in this thesis, is a new, more efficient, exact implementation, which combines the efficiency of the vector play model with the accuracy of the variational approach. The three hysteresis implementations lead to the same result for purely unidirectional or rotational excitation cases, and give a rather good approximation in all situations in-between, at least in isotropic material conditions.

These hysteresis modeling approaches are incorporated into a finite-element code as a local constitutive relation with memory effect. The inclusion is investigated in detail for two complementary finite-element formulations, magnetic field  $\mathbf{h}$  or flux density  $\mathbf{b}$  conforming, the latter requiring the inversion of the vector hysteresis model, naturally driven by  $\mathbf{h}$ , for which the Newton-Raphson method is used. Then, at the finite-element level, once again, the Newton-Raphson technique is adopted to solve the nonlinear finite-element equations, leading to the emergence of discontinuous differential reluctivity and permeability tensors, requiring a relaxation technique in the Newton-Raphson scheme. To the best of the author's knowledge, the inclusion of an energy-based hysteresis model has never been successfully achieved in a  $\mathbf{b}$ -conform finite-element formulation before.



## Résumé

Ce travail se concentre sur le développement d'un modèle d'hystérésis précis basé sur l'énergie pour la modélisation du phénomène d'hystérésis magnétique. Ce modèle repose sur une représentation de l'effet d'ancrage (pinning) comme une force de friction agissant sur la polarisation magnétique. Contrairement aux modèles de Preisach et de Jiles-Atherton, ce modèle est vectoriel dès le début et dérive des premiers principes de la thermodynamique.

Trois approches sont considérées: la première, qui se rapproche d'un modèle de type "vector-play", repose sur une simplification qui permet de dégager une loi de mise à jour explicite, et donc rapide, alors que les deux autres, appelées approche variationnelle et approche différentielle, évitent cette simplification mais nécessitent la résolution d'une équation non-linéaire par un processus itératif. Le modèle "vector-play" et l'approche variationnelle ont déjà été utilisés par d'autres chercheurs, alors que l'approche différentielle introduite dans cette thèse, est une nouvelle implémentation exacte, plus efficace, qui combine l'efficacité du modèle "vector-play" avec la précision de l'approche variationnelle. Les trois implémentations d'hystérésis mènent au même résultat pour des cas d'excitation purement unidirectionnel ou rotationnel, et donnent une assez bonne approximation dans toutes les situations intermédiaires, du moins dans les conditions où le matériau est isotrope.

Ces approches de modélisation de l'hystérésis sont incorporées dans un code d'éléments finis comme une relation constitutive locale avec effet de mémoire. L'inclusion fait l'objet d'un examen détaillé dans deux formulations complémentaires d'éléments finis, conformes en champ magnétique  $\mathbf{h}$  ou en densité de flux  $\mathbf{b}$ , cette dernière nécessitant l'inversion du modèle d'hystérésis vectoriel, naturellement piloté par  $\mathbf{h}$ , pour laquelle la méthode de Newton-Raphson est utilisée. Ensuite, au niveau éléments finis, une nouvelle fois, la technique de Newton-Raphson est adoptée pour résoudre les équations non-linéaires des éléments-finis, conduisant à l'émergence de tenseurs discontinus de réductivité et perméabilité différentielles, qui nécessitent une technique de relaxation dans le schéma de Newton-Raphson. A la connaissance de l'auteur, l'inclusion d'un modèle d'hystérésis basé sur l'énergie n'a jamais été réalisée avec succès dans une formulation éléments finis conforme en  $\mathbf{b}$  auparavant.





## **Remerciements**

Je tiens à remercier mes promoteurs Christophe Geuzaine et Johan Gyselinck de m'avoir fait confiance et donné l'opportunité de mener ce travail avec une grande liberté, dans d'excellentes conditions, au sein des équipes de recherche ACE de l'Université de Liège et BEAMS de l'Université de Bruxelles. Je vous suis reconnaissant de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche scientifique, chacun avec votre vision personnelle, et de m'avoir guidé par vos conseils et votre soutien. Cela a été un plaisir de travailler avec vous durant ces cinq années. Christophe, je suis particulièrement admiratif de ton inébranlable optimisme et ta passion communicative pour ton travail qui ont été des sources de motivation et d'avancement continuels. Johan, je te remercie d'avoir partagé ton expertise technique et ta rigueur scientifique, et j'ai apprécié la disponibilité et l'implication dont tu as fait preuve pour contribuer à l'amélioration de mes productions scientifiques.

Je remercie également les membres de mon comité de thèse, Christophe Geuzaine, Johan Gyselinck, Zacharie De Greve, François Henrotte, Artem Napov, Afef Kedous Lebouc, Paavo Rasilo et Benoît VanderHeyden, pour leur participation, l'intérêt porté sur mon travail et leurs conseils prodigués pour la révision du présent manuscrit. Plus particulièrement, je tiens à remercier François Henrotte avec qui j'ai eu la chance de collaborer plus étroitement et d'échanger de nombreuses idées lors de discussions techniques ou philosophiques. J'ai ainsi pu compter sur ton expérience pour démarrer et poursuivre ma recherche dans la continuité de tes travaux précédents sur l'hystérésis.

Je souhaite aussi remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de cosigner des articles scientifiques. Plus spécifiquement, je pense ici à Patrick Dular et Ruth V. Sabariego qui m'ont donné leur précieuse aide pour le développement de modèles sur les supports Gmsh et GetDP. J'ai beaucoup appris de leur savoir et de leurs conseils. Dans cette continuité, je remercie également Innocent Niyonzima, avec qui j'ai partagé mon bureau au début de ma thèse; Christophe Guérin, pour nos enrichissants échanges de point de vue; et Simon Steentjes, pour son suivi par correspondance et ses données expérimentales fournies. Je remercie aussi sincèrement Laurent Stainier de m'avoir accueilli à l'École centrale de Nantes, pour ses idées et suggestions intéressantes, issues de sa longue expérience dans la résolution de systèmes non-linéaires et qui m'ont été profitables dans mon travail.

En outre, je tiens à souligner l'excellente atmosphère de travail qui a régné au sein du groupe ACE depuis le départ et à remercier chaleureusement tous les collègues actuels et anciens que j'ai eu l'opportunité de côtoyer, à savoir Anthony Royer, Alexandre Halbach, Alexandre Vion, Amaury Johnen, Ariel Lozano, Axel Modave, Christophe Geuzaine, David Colignon, Erin Kuci, Fabrice Frebel, François Henrotte, Frédéric Olivier, Frédéric Plumier, Innocent Niyonzima, Isabel Molenberg, Jean-Fernand Arban, Jean de Dieu Nshimiyimana, Jonathan Velasco, Maryse Ledent, Maxime Graulich, Maxime Spirlet, Nicolas Marsic, Patrick Dular, Pierre Beerten, Ruth V. Sabariego, Simon Tournier, Sophie Cimino, Steven Roman, Valera Biangani, Vanessa Mattesi, Véronique Beauvois, Vincent Nivoliens et Yannick Paquay.

Par ailleurs, je remercie la Région wallonne de Belgique pour la subvention RW1217703 associée au projet WBGreen FEDO, la Politique scientifique fédérale belge (BELSPO) dans le cadre de la subvention PAI/IAP P7/02 et la subvention du partenariat d'innovation technologique TRACTION 2020, qui ont toutes soutenu, en partie, le développement de cette thèse. Je tiens également à remercier le Consortium des Équipements de Calcul Intensif (CÉCI), pour la mise à disposition des clusters informatiques que j'ai eu la chance d'utiliser.

Je souhaite également adresser une pensée à toutes les personnes qui m'ont entouré et soutenu à un moment où un autre au cours de cette aventure. Merci à mes amis, ma belle-famille et ma famille pour tous les bons moments passés ensemble. Je remercie du fond du coeur mes parents qui ont toujours cru en moi et sur qui j'ai pu compter en toutes circonstances. Merci pour vos encouragements, votre soutien, et votre compréhension, y compris dans les moments où j'avais besoin de m'isoler pour me concentrer sur mon travail. J'espère être à la hauteur de vos sacrifices et vous rendre fiers. Enfin, je remercie ma compagne Stéphanie qui a partagé mon quotidien et a su me pousser à avancer toujours plus loin. Merci pour ton amour et ta patience. J'ai de la chance de t'avoir rencontré et me réjouis de savoir ce que nous réserve la suite. À tes côtés, tout me paraît surmontable et le champ des possibles s'élargit.

Kevin Jacques,  
Novembre 2018.



---

# Contents

<b>Contents</b>	<b>i</b>
<b>List of Figures</b>	<b>v</b>
<b>List of Tables</b>	<b>ix</b>
<b>List of Symbols</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Context and Motivations . . . . .	1
Dissertation goals . . . . .	4
Dissertation outline . . . . .	5
Original contributions . . . . .	6
<b>Chapter 1 Magnetic Losses Modelling - State of the Art</b>	<b>9</b>
1 Physical Origins of Magnetism . . . . .	9
1.1 Review of Definitions and Notations . . . . .	9
1.2 Classes of Magnetic Materials . . . . .	11
1.3 Multi-Scale Origin of Ferromagnetism . . . . .	14
1.4 The Hysteresis Curve . . . . .	18
1.5 Iron Losses . . . . .	23
2 Simple Iron Loss Models . . . . .	25
2.1 Approaches based on the Steinmetz Equation . . . . .	25
2.2 Standard Loss Separation Approach . . . . .	26
2.3 Rotational Iron Loss Models . . . . .	28
3 Hysteresis Models . . . . .	29
3.1 Classical Preisach Hysteresis Model . . . . .	29
3.2 Play and Stop Models . . . . .	30
3.3 Notable Experimental Hysteresis Models . . . . .	32
3.4 Jiles-Atherton Model . . . . .	32
3.5 Bergqvist Model . . . . .	34

<b>Chapter 2</b>	<b>Energy-Based Hysteresis Model</b>	<b>37</b>
1	Fundamentals in Thermodynamics . . . . .	37
2	Reversible Part - Helmholtz Free Energy and Anhysteretic Curve . . . . .	38
3	Irreversible Part - Pinning Force and Hysteresis Dissipation . . . . .	40
4	Single-Cell Model . . . . .	41
5	Multi-Cells Model . . . . .	43
5.1	Homogenization of the Energy Balance . . . . .	44
5.2	Homogenization of the Magnetic Field . . . . .	45
<b>Chapter 3</b>	<b>Discrete Energy-Based Hysteresis Model Implementations</b>	<b>47</b>
1	Discretization . . . . .	47
2	Simplified Differential Approach - Vector Play Model . . . . .	49
3	Variational Approach - Functional Minimization . . . . .	51
4	Full Differential Approach - Angle Searching . . . . .	58
5	Numerical Comparison . . . . .	60
5.1	Unidirectional Excitation Field Source . . . . .	61
5.2	Purely Circular Rotational Excitation Field Source . . . . .	64
5.3	Growing Spiral Excitation Field Source . . . . .	65
5.4	Scanning of Excitation Fields from Unidirectional to Rotational Sources . . . . .	66
<b>Chapter 4</b>	<b>Inversion of the Energy-Based Hysteresis Model</b>	<b>71</b>
1	Preliminary Remarks . . . . .	71
2	Newton-Raphson Method . . . . .	72
2.1	Classical Newton-Raphson Method . . . . .	72
2.2	Analytical Expressions of the Differential Permeability Tensor . . . . .	73
2.3	Practical Considerations about the Convergence . . . . .	84
2.4	Relaxation Technique . . . . .	88
3	Approximated Newton-Raphson Methods . . . . .	91
3.1	Numerical Newton-Raphson Method . . . . .	92
3.2	Quasi Newton-Raphson Methods . . . . .	94
4	Numerical Comparison . . . . .	97
<b>Chapter 5</b>	<b>Finite Element Formulations</b>	<b>109</b>
1	Electromagnetic Models . . . . .	109
1.1	General Description . . . . .	109
1.2	Magnetodynamics . . . . .	111
1.3	Magnetostatics . . . . .	111
2	Magnetic Field Conforming Formulations . . . . .	112
2.1	Magnetodynamic $\mathbf{h} - \phi$ Formulation . . . . .	112
2.2	Magnetostatic $\phi$ Formulation . . . . .	115
3	Magnetic Flux Density Conforming Formulations . . . . .	116
3.1	Magnetodynamic $\mathbf{a} - \nu$ Formulation . . . . .	116
3.2	Magnetostatic $\mathbf{a}$ Formulation . . . . .	119
4	Improvements of the Nonlinear Resolution . . . . .	121
4.1	About the Nonlinear Resolution . . . . .	121

4.2	Choice of a Stopping Criterion . . . . .	122
4.3	Computation of an Optimal Relaxation Factor . . . . .	123
4.4	Evaluation of a Jacobian Matrix . . . . .	126
4.5	Initialization using a Prediction of the Solution . . . . .	127
4.6	Use of an Adaptive Time Increment . . . . .	128
<b>Chapter 6 Parameter Identification</b>		<b>131</b>
1	Identification of the Pinning Field Probability Density . . . . .	131
2	Automatic Discretization of the Pinning Field Distribution . . . . .	139
3	Identification of the An hysteretic Curve . . . . .	143
4	Validation on Material Measurements . . . . .	145
<b>Chapter 7 Finite Element Simulations</b>		<b>153</b>
1	Infinite Ferromagnetic Sheet - $1D$ . . . . .	153
2	Square - $2D$ . . . . .	157
3	T-joint - $2D$ . . . . .	170
4	Three-Phase Transformer - $2D$ . . . . .	176
5	Transformer from <i>TEAM</i> Problem 32 Benchmark - $2D$ . . . . .	186
<b>Conclusion</b>		<b>195</b>
	Main Achievements and Conclusions . . . . .	195
	Future Prospects . . . . .	196
<b>Appendix A Ferromagnetism at the Microscopic Scale</b>		<b>201</b>
1	Classical Langevin Theory of Paramagnetism . . . . .	201
2	Quantum Mechanical Theory of Paramagnetism . . . . .	203
3	Weiss Theory of Ferromagnetism . . . . .	205
<b>Appendix B Ferromagnetism at the Mesoscopic Scale</b>		<b>209</b>
1	Magnetic Domain Structure in a Monocrystalline Sample . . . . .	209
2	Magnetic Domain Structure in Polycrystalline material . . . . .	213
<b>Bibliography</b>		<b>215</b>





---

## List of Figures

0.1	Different spatial scales involved in the magnetic properties . . . . .	3
1.1	The magnetic susceptibilities $\chi$ and the magnetic permeabilities $\mu$ . . . . .	13
1.2	The Langevin and the Brillouin functions. . . . .	15
1.3	Division of the magnetic material into magnetic domains. . . . .	17
1.4	Evolution of the magnetization of a single crystal with its magnetic domain structure in presence of pinning sites. . . . .	19
1.5	Typical magnetic hysteresis curve. . . . .	20
1.6	The Virgin curve and Anhyseretic curve. . . . .	21
1.7	Typical $b - h$ curves for soft and hard materials; Easy and hard directions .	22
1.8	Dynamic influence on the hysteresis loops. . . . .	25
1.9	Illustration of the Preisach model. . . . .	30
2.1	Reversible anhyseretic magnetization curve with the Helmholtz free energy.	39
2.2	Illustration of the subgradient concept. . . . .	41
2.3	Mechanical analogy of the hysteresis model with 1 cell. . . . .	42
2.4	Magnetic polarization curve with hysteresis in one spatial direction. . . . .	43
3.1	Mechanical analogy of the hysteresis model with N cells. . . . .	48
3.2	Illustration of the <i>vpm</i> approach. . . . .	50
3.3	Illustration of the <i>var</i> approach. . . . .	52
3.4	Example of a functional minimization using a steepest descent algorithm .	53
3.5	Example of a functional minimization using a conjugate gradient algorithm	54
3.6	Example of Line Search with a <i>naive</i> technique and an approach satisfying Wolfe Conditions . . . . .	55
3.7	Example of Loss of Significance . . . . .	57
3.8	Illustration of the <i>diff</i> approach. . . . .	58
3.9	Example of an angle search with the <i>diff</i> approach. . . . .	60
3.10	Unidirectional and Multi-harmonic excitations of 3-cell <i>EB</i> models. . . . .	62
3.11	2D Purely rotational excitation with 3-cell <i>EB</i> models. . . . .	64
3.12	2D Spiral excitation with 3-cell <i>EB</i> models. . . . .	66

3.13	Loci with various phase shifting angles with $h_{\max} = 50\text{A/m}$ . . . . .	67
3.14	Loci with various phase shifting angles with $h_{\max} = 200\text{A/m}$ . . . . .	67
3.15	<i>RMSDN</i> of the <i>vpm</i> and <i>var</i> approaches, compared to <i>diff</i> . . . . .	69
3.16	<i>CPU</i> times of the <i>vpm</i> and <i>var</i> approaches, compared to <i>diff</i> . . . . .	70
3.17	<i>CPU</i> times in function of the number of cells. . . . .	70
4.1	Illustration of the <i>NR</i> Method. . . . .	73
4.2	Symmetry of the differential permeability tensor of the <i>vpm</i> approach in purely rotational excitation. . . . .	76
4.3	General asymmetry of the differential permeability tensor of the <i>vpm</i> approach. . . . .	77
4.4	General symmetry of the differential permeability tensor of the <i>diff</i> approach. . . . .	83
4.5	Failures of the classical <i>NR</i> Method. . . . .	85
4.6	Discontinuity in the differential permeability tensor. . . . .	87
4.7	Failure of the classical <i>NR</i> method for the inversion of the <i>EB</i> model near an angular point. . . . .	88
4.8	Illustration of the relaxed <i>NR</i> method. . . . .	89
4.9	Convergence of the relaxed <i>NR</i> method. . . . .	90
4.10	Direct and inverse forms of the <i>EB</i> model with ramp excitation. . . . .	90
4.11	Direct and inverse forms of the <i>EB</i> model with rotational excitations, with or without higher harmonic content. . . . .	91
4.12	Illustration of the secant method. . . . .	95
4.13	Convergence of the secant method. . . . .	95
4.14	Details on the performance of non-relaxed inversion techniques on <i>vpm</i> . . . . .	102
4.15	Details on the performance of relaxed inversion techniques on <i>vpm</i> . . . . .	103
4.16	Details on the performance of non-relaxed inversion techniques on <i>var</i> . . . . .	104
4.17	Details on the performance of relaxed inversion techniques on <i>var</i> . . . . .	105
4.18	Details on the performance of non-relaxed inversion techniques on <i>diff</i> . . . . .	106
4.19	Details on the performance of relaxed inversion techniques on <i>diff</i> . . . . .	107
5.1	<i>Standard</i> and <i>heavy</i> search technique for the relaxation factor. . . . .	125
5.2	Extrapolating predictions with polynomial of different degrees for a given <i>DOF</i> $x(t)$ . . . . .	128
6.1	Coercive field $h_c(h)$ measured for five materials. . . . .	134
6.2	Coercive field $h_c(h)$ and function $F(h)$ for the material M235-35A. . . . .	135
6.3	Function $F(h)$ and pinning field cumulative distribution function for the material M235-35A. . . . .	135
6.4	Pinning field cumulative distribution function for five materials. . . . .	137
6.5	Identified pinning field probability density for five materials. . . . .	137
6.6	Pinning field cumulative distribution function for M235-35A in <i>RD</i> and <i>TD</i> . . . . .	139
6.7	Identified pinning field probability density for M235-35A in <i>RD</i> and <i>TD</i> . . . . .	139
6.8	Discretization with 3 cells of the pinning field distribution characteristics. . . . .	141
6.9	Discretization with 2+1 cells of the pinning field distribution characteristics. . . . .	142
6.10	Discretization with 5+1 cells of the pinning field distribution characteristics. . . . .	142
6.11	Discretization with 14+1 cells of the pinning field distribution characteristics. . . . .	143



6.12	Identified anhysteretic curves with double Langevin and hyperbolic tangent functions (Logarithmic scale). . . . .	144
6.13	Identified anhysteretic curves with double Langevin and hyperbolic tangent functions (Linear scale). . . . .	145
6.14	Measurements provided by the <i>TEAM 32</i> benchmark problem. . . . .	146
6.15	Evolution of the fields $\mathbf{h}$ and $\mathbf{b}$ for major loop of the <i>TEAM 32</i> material. . . . .	147
6.16	Measured and simulated major loops of the <i>TEAM 32</i> material. . . . .	148
6.17	$RMSD_r$ factor in function of the number of cells of the <i>TEAM 32</i> material. . . . .	150
6.18	Measured and simulated minor loops of the <i>TEAM 32</i> material. . . . .	151
7.1	Lamination with the unidirectional <i>FE</i> configuration. . . . .	154
7.2	Energy analysis of the lamination sheet, during one cycle. . . . .	155
7.3	Frequency dependences of the classical eddy current and hysteresis losses. . . . .	156
7.4	Static and dynamic hysteresis curves with the lamination model. . . . .	156
7.5	Geometry and mesh of the simple square domain. . . . .	158
7.6	Details on performances of <i>standard</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>vpm</i> . . . . .	165
7.7	Details on performances of <i>standard</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>var</i> . . . . .	166
7.8	Details on performances of <i>standard</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>diff</i> . . . . .	166
7.9	Details on performances of <i>heavy</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>vpm</i> . . . . .	167
7.10	Details on performances of <i>heavy</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>var</i> . . . . .	167
7.11	Details on performances of <i>heavy</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>diff</i> . . . . .	168
7.12	Details on performances of <i>accelerated</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>vpm</i> . . . . .	168
7.13	Details on performances of <i>accelerated</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>var</i> . . . . .	169
7.14	Details on performances of <i>accelerated</i> relax. of the <i>FE</i> System including <i>diff</i> . . . . .	169
7.15	Geometry and mesh of the T-joint domain. . . . .	170
7.16	Magnetic fluxes imposed in the three flux gates with soft start. . . . .	171
7.17	Magnetomotive forces with complementary <i>FE</i> formulations of the T-joint. . . . .	173
7.18	Loci and hysteresis loops obtained with two complementary <i>FE</i> formulations at different points in the T-joint . . . . .	174
7.19	Loci and hysteresis loops obtained with the $\mathbf{a}$ -formulation including the inverse <i>diff</i> or <i>vpm</i> approaches, at different points in the T-joint. . . . .	175
7.20	Geometry and mesh of the three-phase transformer model. . . . .	176
7.21	Smooth start of the Voltages imposed in the three primary windings. . . . .	178
7.22	Currents in the primary windings with each simulation configuration. . . . .	179
7.23	$b-h$ curves and loci at different points of the transformer model. . . . .	180
7.24	Mesh influence on global-quantity results with the <i>vpm</i> approach. . . . .	181
7.25	Mesh influence on local-quantity results with the <i>vpm</i> approach. . . . .	181
7.26	Evolution of the residual in the <i>NR</i> scheme used at the <i>FE</i> system level. . . . .	184
7.27	CPU times with both <i>FE</i> formulations, with the <i>vpm</i> or <i>anhy</i> approaches, for different meshes. . . . .	185
7.28	2D structure of the three-limb transformer with pick-up coils. . . . .	186
7.29	Geometry and mesh of the <i>TEAM</i> problem 32. . . . .	187
7.30	CASE2: Current in the windings. . . . .	189
7.31	CASE2: Magnetic flux density $b_y$ at point 3. . . . .	189
7.32	CASE3: Currents in the windings. . . . .	190
7.33	CASE3: Magnetic flux density $b_x$ at point 1. . . . .	191

---

7.34	CASE3: Magnetic flux density $b_y$ at point 1. . . . .	192
7.35	CASE3: Magnetic flux density $b_x - b_y$ loci at point 1. . . . .	192
7.36	CASE3: Magnetic flux density $b_x$ at point 2. . . . .	193
7.37	CASE3: Magnetic flux density $b_y$ at point 2. . . . .	193
7.38	CASE3: Magnetic flux density $b_x - b_y$ loci at point 2. . . . .	194
A.1	Langevin function . . . . .	202
A.2	Brillouin function . . . . .	204
A.3	Weiss Theory . . . . .	206
B.1	Complex balance of four energy terms in the magnetic domain structure. .	210
B.2	Magnetocrystalline anisotropy. . . . .	211
B.3	Zeeman Energy . . . . .	213
B.4	Pinning effect around a non-magnetic cavity. . . . .	214



---

## List of Tables

3.1	Direct model using 3 cells - Unidirectional Excitation. . . . .	63
3.2	Direct model using 3 cells - 2D purely rotational Excitation. . . . .	64
3.3	Direct model using 3 cells - 2D Spiral Excitation. . . . .	66
4.1	Simulations without relaxation in the <i>inv</i> techniques, with each approach.	98
4.2	Simulations with relaxation in the <i>inv</i> techniques, with each approach. . .	98
7.1	Simulations with <i>standard</i> search technique for relaxation factors in <i>NR</i> of <i>FE</i> systems. . . . .	161
7.2	Simulations with <i>heavy</i> search technique for relaxation factors in <i>NR</i> of <i>FE</i> systems. . . . .	161
7.3	Simulations with <i>accelerated</i> search technique for relaxation factors in <i>NR</i> of <i>FE</i> systems. . . . .	161
7.4	Convergence characteristics of <i>FE</i> formulations for the T-joint problem. . .	172