Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 février 1937, n° 2.

Théorie nouvelle de la dynamique des systèmes continus,

(*Cinquième communication.*)

par TH. DE DONDER, Membre de l'Académie, et Y. DUPONT.

1. Reprenons la fonction lagrangienne introduite en (1). Supposons que cette fonction ne dépende ni des $\Psi_{\alpha\beta}$ ni de leurs dérivées et identifions le potentiel-vecteur Φ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) avec le potentiel-vecteur de Maxwell.

Nous poserons ici

$$\boxed{\mathfrak{L} \equiv \sum_\alpha \mathfrak{C}^\alpha \Phi_\alpha + \sum_\alpha \sum_\beta \mathfrak{H}^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha.\beta}} \tag{161}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

où $\mathfrak{C}^\alpha$ est le *courant électrique* et $\mathfrak{H}^{\alpha\beta}$ est un tenseur antisymétrique qui représente *la force électromagnétique*.

La formule (161) peut aussi s'écrire

$$\mathfrak{L} \equiv \sum_\alpha \mathfrak{C}^\alpha \Phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \mathfrak{H}^{\alpha\beta} (\Phi_{\alpha.\beta} - \Phi_{\beta.\alpha}). \tag{162}$$

Appliquons maintenant le principe variationnel (4), à savoir

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \Phi_\alpha} = 0; \tag{163}$$

nous obtenons

$$\boxed{\sum_\beta \mathfrak{H}^{\alpha\beta}{}_{.\beta} = \mathfrak{C}^\alpha.} \tag{164}$$

Posons maintenant pour la *force électromagnétique adjointe*

$$\mathfrak{H}_\times^{\overline{\alpha\beta}} \equiv \Phi_{\alpha.\beta} - \Phi_{\beta.\alpha} \tag{165}$$

où les indices $\alpha\beta\ \overline{\alpha\beta}$ forment une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. On a, par exemple,

$$\mathfrak{H}_\times^{\overline{31}} \equiv \Phi_{24} - \Phi_{42}. \tag{166}$$

En vertu de (165), on aura

$$\boxed{\sum_{\beta} \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\times}{}_{.\beta} = 0.} \tag{167}$$

Les relations (164) et (167) peuvent s'écrire, grâce au caractère d'*antisymétrie* des $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ et $\mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\ast}$,

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{\beta} \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} &= \mathfrak{C}^{\alpha} \\ \sum_{\beta} \frac{\partial \mathcal{H}^{\alpha\beta}_{\times}}{\partial x^{\beta}} &= 0. \end{aligned}} \tag{168}$$

Ce sont les *équations du champ électromagnétique de Maxwell* (1).

2. Posons pour la *force électromagnétique de Lorentz généralisée* (2).

$$\mathfrak{L}_{\alpha} = \sum_{\mu} \mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times} \mathfrak{C}^{\mu}. \tag{169}$$

En vertu des équations de Maxwell (164), nous pouvons écrire

$$\mathfrak{L}_{\alpha} = \sum_{\beta} \sum_{\mu} \mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times} \mathcal{H}^{\mu\beta}{}_{.\beta}. \tag{170}$$

Essayons d'introduire, dans (170), une divergence. Nous aurons tout d'abord

$$\mathfrak{L}_{\alpha} = \sum_{\beta} \sum_{\mu} (\mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times} \mathcal{H}^{\mu\beta})_{.\beta} - \sum_{\beta} \sum_{\mu} \mathcal{H}^{\mu\beta} \mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}{}_{.\beta}. \tag{171}$$

On montre par un calcul direct (3) que l'on a identiquement

$$\sum_{\beta} \sum_{\mu} \mathcal{H}^{\beta\mu} \left(\frac{1}{2} \mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}_{\times}{}_{.\alpha} - \mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}{}_{.\beta} \right) \equiv \sum_{\beta} \sum_{\mu} \mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}} \mathcal{H}^{\beta\mu}_{\times}{}_{.\beta}. \tag{172}$$

---

(1) TH. DE DONDER, Application de la Gravifique einsteinienne à l'Électrodynamique des corps en mouvement (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. LVIII. Paris, Gauthier-Villars, 1932), form. (27) et (28). Ici le courant *magnétique* $\mathrm{C}^{\alpha}_{\times} \equiv 0$.

(2) TH. DE DONDER, *loc. cit., form.* 37.

(3) W. VAN DEN BERG, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1925, n° 6, p. 232.

D'où, en vertu des équations de Maxwell (167).

$$\frac{1}{2}\sum_{\beta}\sum_{\mu}\mathcal{H}^{\beta\mu}\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}_{\times}{}_{.\alpha}=\sum_{\beta}\sum_{\mu}\mathcal{H}^{\beta\mu}\mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}{}_{.\beta}. \tag{173}$$

Introduisons (173) dans (171) ; d'où

$$\mathfrak{L}_{\alpha}=\sum_{\beta}\sum_{\mu}\left[(\mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}\mathcal{H}^{\mu\beta})_{.\beta}+\frac{1}{2}\mathcal{H}^{\beta\mu}\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}_{\times}{}_{.\alpha}\right], \tag{174}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\alpha}=\sum_{\beta}\sum_{\mu}&\left[-\mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}\mathcal{H}^{\beta\mu}+\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha}^{\beta}\sum_{\nu}\mathcal{H}^{\mu\nu}\mathcal{H}^{\overline{\mu\nu}}_{\times}\right]_{.\beta}\\&+\frac{1}{4}\sum_{\beta}\sum_{\mu}[\mathcal{H}^{\beta\mu}_{\times}{}_{.\alpha}\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}-\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}_{\times}\mathcal{H}^{\beta\mu}{}_{.\alpha}].\end{aligned}\right\} \tag{175}$$

Rappelons que $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}=0$ ou 1 suivant que $\alpha\neq\beta$ ou $\alpha=\beta$.
Posons (¹)

$$\mathfrak{T}^{\beta}_{(e)\alpha}\equiv-\sum_{\mu}\mathcal{H}^{\overline{\alpha\mu}}_{\times}\mathcal{H}^{\beta\mu}+\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha}^{\beta}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\mathcal{H}^{\mu\nu}\mathcal{H}^{\overline{\mu\nu}}_{\times} \tag{176}$$

et, pour l'*hystérèse électromagnétique généralisée*,

$$\mathfrak{H}^{(e)}_{\alpha}\equiv\frac{1}{4}\sum_{\beta}\sum_{\mu}[\mathcal{H}^{\beta\mu}_{\times}{}_{.\alpha}\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}-\mathcal{H}^{\overline{\beta\mu}}_{\times}\mathcal{H}^{\beta\mu}{}_{.\alpha}]. \tag{177}$$

D'où les quatre relations (175) peuvent s'écrire

$$\mathfrak{L}_{\alpha}=\sum_{\beta}\mathfrak{T}^{\beta}_{(e)\alpha.\beta}+\mathfrak{H}^{(e)}_{\alpha}. \tag{178}$$

Nous poserons

$$\mathfrak{F}^{(e)}_{\alpha}\equiv\sum_{\beta}\mathfrak{T}^{\beta}_{(e)\alpha.\beta} \tag{179}$$

et nous dirons que $\mathfrak{F}^{(e)}_{\alpha}$ est *la force électromagnétique* du système considéré. Si le système est dépourvu de polarisation, $\mathfrak{F}^{(e)}_{\alpha}$ se réduit à $\mathfrak{L}_{\alpha}$.

3. *Champ de Minkowski.* — Si dans ce champ nous choisissons des axes rectangulaires dextrogyres $x^1\equiv x$, $x^2\equiv y$, $x^3\equiv z$

(¹) Y. Dupont, La force et le couple électromagnétiques dans un champ gravifique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1er février 1936, n° 2, pp. 209-214), form. (1) et (19).

et que nous posons $x^4 \equiv t$, nous pouvons introduire les notations habituelles de l'électromagnétisme par les relations [1]

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{H}^{23} = c\mathcal{H}_x & \mathfrak{H}^{31} = c\mathcal{H}_y & \mathfrak{H}^{12} = c\mathcal{H}_z \\ \mathfrak{H}^{14} = -\mathrm{B}_x & \mathfrak{H}^{24} = -\mathrm{B}_y & \mathfrak{H}^{34} = -\mathrm{B}_z \\ \mathfrak{H}^{23}_{\times} = c\mathrm{H}^{\times}_x & \mathfrak{H}^{31}_{\times} = c\mathrm{H}^{\times}_y & \mathfrak{H}^{12}_{\times} = c\mathrm{H}^{\times}_z \\ \mathfrak{H}^{14}_{\times} = \mathfrak{B}_x & \mathfrak{H}^{24}_{\times} = \mathfrak{B}_y & \mathfrak{H}^{34}_{\times} = \mathfrak{B}_z \end{array}\right\} \tag{180}$$

où $(\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z)$ sont les composantes de la *force magnétique*, $(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)$ celles de l'*induction magnétique*. On a en outre

$$\mathrm{H}^{\times}_x \equiv \mathrm{H}_x - \mathrm{H}^{(a)}_x, \quad \mathrm{H}^{\times}_y \equiv \mathrm{H}_y - \mathrm{H}^{(a)}_y, \quad \mathrm{H}^{\times}_z \equiv \mathrm{H}_z - \mathrm{H}^{(a)}_z \tag{181}$$

où $(\mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y, \mathrm{H}_z)$ sont les composantes de la force électrique, $(\mathrm{H}^{(a)}_x, \mathrm{H}^{(a)}_y, \mathrm{H}^{(a)}_z)$ celles de la force électrique *imprégnée*. De plus, $(\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z)$ sont les composantes de l'induction électrique.

Grâce aux notations (180), les équations (168) prennent la forme maxwellienne, à savoir [2]

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathrm{B} = \rho; & \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} + \mathrm{C}\right); & \operatorname{rot} \mathrm{H}^{\times} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \end{array}\right\} \tag{182}$$

De même, les notations (180) permettent d'écrire *la force de Lorentz* (169) sous la forme vectorielle [3].

$$\mathrm{L} = \frac{1}{c}[\mathrm{C}.\mathfrak{B}] + \rho \mathrm{H}^{\times}. \tag{183}$$

La quatrième composante vaudra l'*effet Joule* changé de signe, à savoir

$$\mathrm{L}_4 = -(\mathrm{H}^{\times}.\mathrm{C}). \tag{184}$$

De même, l'*hystérèse* (177) se décomposera en un vecteur de composantes

$$\mathrm{H}^{(e)}_i = \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{H}^{\times} \cdot \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x^i}\right) - \left(\mathrm{B} \cdot \frac{\partial \mathrm{H}^{\times}}{\partial x^i}\right) + \left(\mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x^i}\right) - \left(\mathfrak{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}\right)\right] \tag{185}$$

---

(1) TH. DE DONDER *loc. cit.*, form. (26).

(2) TH. DE DONDER *Théorie mathématique de l'Electricité* (Paris, Gauthier-Villars, 1925), form. (578), (579), (582) et (587).

(3) TH. DE DONDER, *Electricité...*, *loc. cit.*, form. (612).

et un scalaire

$$H_4^{(e)} = \frac{1}{2}\left[\left(H^\times \cdot \frac{\partial B}{\partial t}\right) - \left(B \cdot \frac{\partial H^\times}{\partial t}\right) + \left(\mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right) - \left(\mathcal{B} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)\right]. \quad (186)$$

4. *Théorème de l'impulsion et de l'énergie* (¹). — Transcrivons les relations (178) dans le champ considéré; nous aurons, en tenant compte des notations (180) (²),

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T^j_{(e)i}}{\partial x^j} + \frac{\partial T^4_{(e)i}}{\partial t} = \frac{1}{c}[C \cdot \mathcal{B}]_i + \rho H_i^\times - H_i^{(e)} \quad (187)$$

$$i = 1, 2, 3$$

et

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T^i_{(e)4}}{\partial x^i} + \frac{\partial T^4_{(e)4}}{\partial t} = -(H^* \cdot C) - H_4^{(e)}. \quad (188)$$

Multiplions (187) et (188) par l'élément de volume $d^\times v$ et intégrons à un volume v pris dans le champ électromagnétique. Nous obtiendrons, en appliquant la formule de Green, *les équations de l'électrodynamique*

$$\left.\begin{aligned} &\oint_S \sum_j T^j_{(e)i} \cos(n, j)\, d^\times S + \frac{\partial}{\partial t}\int_v T^4_{(e)i}\, d^\times v \\ &= \int_v \left[\frac{1}{c}[C \cdot \mathcal{B}]_i + \rho H_i^\times - H_i^{(e)}\right] d^\times v \end{aligned}\right\} \quad (189)$$

et *le bilan d'énergie électromagnétique* (³)

$$\left.\begin{aligned} &\oint_S \sum_i T^i_{(e)4} \cos(n, i)\, d^\times S + \frac{\partial}{\partial t}\int_v T^4_{(e)4}\, d^\times v \\ &= -\int_v (H^\times \cdot C)\, d^\times v - \int_v H_4^{(e)}\, d^\times v. \end{aligned}\right\} \quad (190)$$

Comme précédemment, (n, j) représente l'angle compris entre l'axe x^j et la demi-normale extérieure en un point de la surface fermée S limitant le volume v (à l'instant t considéré).

(¹) Y. Dupont, *loc. cit.*, paragraphe 3.
(²) Th. De Donder, *Electricité...*, *loc. cit.*, form. (616).
(³) Idem, *ibid.*, form. 609.

Dans (189), les $T^j_{(e),i}$ représentent *le tenseur électromagnétique de Maxwell* généralisé par Th. De Donder [1]. Il peut s'écrire, en vertu de (176) et (180),

$$T^i_{(e)j} = B^i H_j + \mathfrak{B}^i \mathcal{H}_j - \varepsilon^i_j W. \qquad (191)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

On trouve en outre

$$T^4_{(e)4} \equiv W = \frac{1}{2}[(H \, . \, B) + (\mathcal{H} \, . \, \mathfrak{B})], \qquad (192)$$

où W désigne *la densité d'énergie électromagnétique de Maxwell.*

Les $T^i_{(e)4}$ et les $T^4_{(e)i}$ seront aussi déduits de (176) et (180); on aura ainsi

$$T^4_{(e)i} = -\frac{1}{c}[B \, . \, \mathfrak{B}]_i \qquad (193)$$

$$T^i_{(e)4} = c[H \, . \, \mathcal{H}]_i. \qquad (194)$$

Nous pourrons donc dire que dans (189) les termes

$$\int T^4_{(e)i} \, d^\times v \qquad (195)$$

représentent les trois composantes de *la quantité de mouvement électromagnétique*. Dans (190) le terme

$$\oint \sum_i T^i_{(e)4} \cos(n, i) \, d^\times S \qquad (196)$$

représente *le flux radiant de Poynting* à travers la surface fermée S.

(1) Th. De Donder, *Electricité...*, *loc. cit.*, form. (615), et Y. Dupont, *loc. cit.*, form. (4) à (8).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.