ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

530.1
N 979
n°2

EXTRAIT DES BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 2 décembre 1922, pp. 755-766

Trajectoire d'un point matériel dans le champ dû à une sphère matérielle

PAR

MAURICE NUYENS

BRUXELLES

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, Rue de Louvain, 112

1923

530.1
N 979
n°2
UXELLES-UNIVERSITE

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 2 décembre 1922, n° 12, pp. 755-766.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — **Trajectoire d'un point matériel dans le champ dû à une sphère matérielle.**

Note par MAURICE NUYENS (*).

Dans sa *Gravifique einsteinienne* (**), M. De Donder établit la forme quadratique définissant le champ dû à une sphère matérielle. Je me propose, en partant de cette forme quadratique et en utilisant le théorème du tenseur asymétrique, de chercher l'équation différentielle de la trajectoire d'une particule matérielle placée dans le champ de cette sphère. La masse et la charge de cette particule seront supposées suffisamment petites pour ne pas modifier sensiblement le champ matériel.

En considérant la particule à un moment où sa vitesse est nulle, une des quatre équations déduites du théorème du tenseur asymétrique montre, en première approximation, que l'action entre les deux particules est la somme des actions de Coulomb et de Newton.

Les calculs effectués permettront de s'assurer, en outre, de

(*) Présenté par M. Th. De Donder.

(**) Gauthier-Villars, Paris, 1922, ou *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, 3e série, t. I.

83827

ce que le mouvement de la particule potentiée est régi par le théorème des aires et par le théorème des forces vives généralisés.

Je terminerai cette Note en établissant l'équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux dans le champ gravifique dû à une sphère matérielle.

Rappelons qu'on entend ici par sphère *matérielle* une sphère massique électrisée.

I. Sphère matérielle potentiante. — Le champ gravifique à l'extérieur d'une sphère matérielle est défini par [*Grav. einst.*, (407)]

$$\left.\begin{aligned}(\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R}} - R^2[(\delta\theta)^2+\sin^2\theta\,(\delta\varphi)^2] \\ + c^2\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)(\delta t)^2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où γ est mis pour [*Grav. einst.*, (409)]

$$\gamma = \frac{\varkappa\mu_0}{3}a^3 + \frac{\varepsilon^2}{a}. \quad (1')$$

$\varkappa$ désignant une constante, μ_0 et ε désignant respectivement la densité massique généralisée et la charge (à une constante près) de la sphère; a est le rayon de cette sphère.

En vertu de la symétrie, on pourra supposer les trajectoires planes et passant par l'origine. En prenant ce plan comme plan équatorial, on aura $\theta = \frac{\pi}{2}$, et l'on écrira plus simplement

$$(\delta s)^2 \equiv -\frac{(\delta R)^2}{1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}} - R^2(\delta\varphi)^2 + c^2\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)(\delta t)^2. \quad (2)$$

Sur toute trajectoire, on aura donc la relation

$$\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^{-1}\left(\frac{\delta R}{\delta s}\right)^2 + R^2\left(\frac{\delta\varphi}{\delta s}\right)^2 - c^2\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\left(\frac{\delta t}{\delta s}\right)^2 + 1 = 0. \quad (3)$$

Pour éliminer t et s, utilisons le théorème du tenseur asymétrique (Compl. II, éq. [20] (*).

La masse et l'électricité étant animées des mêmes mouvements, ce théorème se réduit à

$$\sigma \sum_{\beta} u^{\beta} M^{*}_{\beta i} = \left(\mu - \frac{\mathcal{L}\sigma}{2}\right) A_i, \tag{4}$$

où (Compl. II, éq. [14])

$$A_i \equiv \frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta,i} u^{\alpha} u^{\beta}. \tag{5}$$

En supposant la masse et la charge du point assez petites pour ne pas modifier sensiblement le champ matériel, on aura donc pour valeurs des composantes du potentiel [*Grav. einst.* (390)]

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0, \qquad \Phi_4 = \Phi, \tag{6}$$

où Φ est uniquement fonction de R. Pour la même raison, tous les $M^{*}_{\beta i}$ seront nuls, sauf [*Grav. einst.*, (391)]

$$M^{*}_{14} = -\frac{d\Phi}{dx_1}. \tag{7}$$

Rappelons que [*Grav. einst.*, (364)]

$$x_1 \equiv \frac{R^3}{3}; \qquad x_2 \equiv -\cos\theta; \qquad x_3 \equiv \varphi; \qquad x_4 \equiv t. \tag{8}$$

Le théorème du tenseur asymétrique donne les quatre relations :

$$\left.\begin{aligned} \sigma \frac{d\Phi}{dx_1}\frac{dt}{ds} &= \left(\mu - \frac{\mathcal{L}\sigma}{2}\right) A_1, \\ 0 &= A_2, \\ 0 &= A_3, \\ \sigma u^4 \frac{d\Phi}{dx_1} &= -\left(\mu - \frac{\mathcal{L}\sigma}{2}\right) A_4. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*) Th. De Donder, *Premiers compléments de la Gravifique einsteinienne.* Gauthier-Villars, Paris, 1922, ou *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, 3e série, t. I.

La *seconde* équation (9) est identiquement satisfaite ; en effet,

$$\frac{du_2}{ds} \equiv \sin\theta \frac{d\theta}{ds} \equiv 0,$$

et tous les $g_{\alpha\beta,2}$ sont nuls.

La *troisième* équation (9) nous fournit l'invariant

$$\boxed{R^2 \frac{d\varphi}{ds} = p.} \qquad (p = \text{constante d'intégration}). \tag{10}$$

En effet,

$$u_3 = u^3 g_{33} = -\frac{d\varphi}{ds} R^2,$$

et tous les $g_{\alpha\beta,3}$ sont nuls. En se reportant à (5), on obtient l'invariant annoncé.

Pour expliciter la *quatrième* équation, calculons A_4. On aura (5)

$$A_4 \equiv \frac{du_4}{ds} \equiv \frac{d}{ds}\left[c^2 \frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\right]. \tag{11}$$

D'autre part, on a (8) :

$$w^4 = R^2 \frac{dR}{ds}, \tag{12}$$

et, en vertu de [*Grav. einst.* (399)],

$$\frac{d\Phi}{dx_4} = -c\frac{e}{4\pi R^4}; \tag{13}$$

d'où

$$\frac{d\Phi}{dR} = -c\frac{e}{4\pi R^2}. \tag{14}$$

En intégrant cette dernière équation on aura

$$\Phi = \frac{ce}{4\pi R}, \tag{15}$$

en supposant $\Phi = 0$, à l'infini.

La quatrième équation (9) s'écrira maintenant

$$\sigma \frac{ce}{4\pi R^2} \frac{dR}{ds} = \left(\mu - \frac{\mathcal{L}\sigma}{2}\right) \frac{d}{ds}\left[c^2 \frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\right]. \tag{16}$$

II. Point matériel potentié. — Passons à l'étude du mouvement du point potentié. Sa charge électrique sera désignée par e'. Posons encore (Compl. II, [47'] à [52]) :

$$\sigma E' \equiv \left(\mu - \frac{\mathcal{L}\sigma}{2}\right) e'; \tag{17}$$

on sait que E' et e' sont des *invariants* (Compl. II, [37] et [52]) dans le mouvement du point matériel considéré.

En vertu de (16) et (17), on obtient

$$\frac{cee'}{4\pi R^2} \frac{dR}{ds} = E' \frac{d}{ds}\left[c^2 \frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\right]. \tag{18}$$

En intégrant (18) on obtient

$$C - \frac{ee'}{4\pi R} = E' c^2 \frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right), \quad \left(\begin{matrix} C = \text{constante} \\ \text{d'intégration.} \end{matrix}\right) \tag{19}$$

Posons

$$E' \equiv c^2 M'; \tag{20}$$

nous dirons que M' est la *masse* d'origine massique et électromagnétique du point en mouvement.

La relation (19) peut alors se mettre sous la forme

$$\boxed{q - \frac{ee'}{4\pi c^2 M' R} = \frac{dt}{ds}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right).} \tag{21}$$

où nous écrivons la constante d'intégration

$$q \equiv \frac{C}{c^2 M'}.$$

Éliminons t et s dans (3), grâce à (10) et (21), et posons

$$u \equiv \frac{1}{R}; \tag{22}$$

on obtient l'*équation différentielle de la trajectoire décrite par le point matériel potentié :*

$$\boxed{p^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = c^2\left(q - \frac{ee'}{4\pi c^2 M'}u\right)^2 - (1 + p^2u^2)(1 - \gamma u + \varepsilon^2 u^2).} \tag{23}$$

Remarque. — En vertu de (Compl. II, [51]), on peut écrire

$$E' \equiv c^2 m' - \frac{\mathcal{L}}{2}e', \tag{24}$$

où m' est la masse d'origine purement massique du point matériel en mouvement. En posant, avec M. De Donder,

$$-\frac{\mathcal{L}}{2}e' = c^2 m'_e, \tag{25}$$

où m'_e est la masse purement électromagnétique de cette particule, on voit que (20)

$$\boxed{M' = m' + m'_e.} \tag{26}$$

Il est à remarquer que ni m' ni m'_e ne sont des invariants dans le mouvement de la particule; leur somme M' seule est constante pendant son mouvement.

Si la masse m'_e est, par hypothèse, très petite par rapport à la masse m', on aura approximativement, si $m' \neq 0$,

$$E \sim c^2 m' \quad \text{ou} \quad M \sim m'; \tag{27}$$

si $m' \equiv 0$, il faudra conserver la masse d'origine électromagnétique; on aura

$$E \equiv c^2 m'_e \quad \text{ou} \quad M \equiv m'_e. \tag{28}$$

Ce dernier cas a fait l'objet d'une étude précédente (*); comme il ne pouvait y avoir confusion, il n'a pas été jugé nécessaire d'y employer l'indice e.

III. Action entre la sphère matérielle potentiante et le point matériel potentié. — Considérons maintenant la *première* équation (9), et supposons que le point potentié, à l'instant considéré, ait une vitesse nulle; on aura donc

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \tag{29}$$

La première équation devient alors, en tenant compte de (17),

$$\left.\begin{aligned} &-c\frac{ee'}{4\pi R^4}\frac{dt}{ds} \\ &= E'\left[-\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^{-1}\frac{d^2R}{ds^2}-\frac{c^2}{2}\frac{1}{R^2}\left(\frac{\gamma}{R^2}-\frac{2\varepsilon^2}{R^3}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

En vertu de (2), on a, en outre,

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = c^{-2}\left(1-\frac{\gamma}{R}+\frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^{-1}. \tag{31}$$

Passons à l'espace *et* le temps, en remarquant que

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2R}{dt^2}.$$

En utilisant la constante de Gauss f, introduite par M. De Donder en posant [*Grav. einst.*, (429) et (438)]

$$f = \frac{c^2\varkappa}{8\pi}, \tag{32}$$

(*) Maurice Nuyens, *Trajectoire d'un point électrisé dans le champ dû à un électron pur.* [Bull. Acad. roy. de Belgique (Classe des sciences), octobre 1922.]

on déduit finalement de (30), en première approximation,

$$\boxed{m'\frac{d^2R}{dt^2} \sim \frac{ee'}{4\pi R^2} - f\frac{mm'}{R^2}}. \tag{33}$$

On a tenu compte dans cette formule de $M' \sim m'$, avec $m' \neq 0$ (27).

IV. Théorème des aires généralisé. — Reportons-nous aux équations (10) et (21); divisons-les membre à membre; d'où

$$\boxed{R^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{q - \dfrac{ee'}{4\pi c^3 M'R}}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)}. \tag{34}$$

Le premier membre de la relation précédente exprime la *vitesse des aires balayées.*

V. Théorème des forces vives généralisé. — Éliminons ds entre les équations (3) et (21); on obtient

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right) - c^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^2 + \frac{\left(1 - \dfrac{\gamma}{R} + \dfrac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^3}{\left(q - \dfrac{ee'}{4\pi c^3 M'R}\right)^2} = 0. \tag{35}$$

C'est le *théorème des forces vives généralisé* ou de la *conservation de l'énergie.*

L'expression généralisée du carré de la vitesse est, en vertu de (2),

$$v^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{\gamma}{R} + \dfrac{\varepsilon^2}{R^2}}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{36}$$

Introduisons l'expression dans (35); d'où

$$\boxed{v^2 = c^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right) - \frac{\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^2}{\left(q - \frac{ee'}{4\pi c^3 M' R}\right)^2}}. \tag{37}$$

VI. Rayon lumineux dans le champ gravifique dû à une sphère matérielle. — On sait que les trajectoires des rayons lumineux sont des extrémales de longueur *nulle* du champ considéré. Nous ferons donc dans l'équation (2)

$$ds = 0. \tag{38}$$

Cette équation devient, en utilisant la variable auxiliaire l,

$$-\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^{-1}\left(\frac{dR}{dl}\right)^2 - R^2\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)^2 + c^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)\left(\frac{dt}{dl}\right)^2 = 0. \tag{39}$$

Nous avons, d'autre part,

$$R^2\left(\frac{d\varphi}{dl}\right) = p \tag{40}$$

et

$$q - \frac{ee'}{4\pi c^3 M' R} = \frac{dt}{dl}\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right). \tag{41}$$

Éliminons dl et dt dans (39), grâce à ces deux dernières équations; nous aurons, en posant

$$u = \frac{1}{R},$$

l'équation différentielle de la trajectoire du rayon lumineux :

$$\boxed{p^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = c^2\left(q - \frac{ee'}{4\pi c^3 M'} u\right)^2 - p^2 u^2 (1 - \gamma u + \varepsilon^2 u^2)}, \tag{42}$$

On voit que cette équation présente beaucoup d'analogie avec l'équation différentielle de la trajectoire du point matériel potentié (23).

Pour trouver la vitesse c_* de la lumière dans le champ dû à la sphère matérielle, il suffit de mettre l'équation (39) sous la forme

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right) = c^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)^2. \tag{43}$$

Posons

$$c_*^2 = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \tag{44}$$

on obtient

$$\boxed{c_*^2 = c^2\left(1 - \frac{\gamma}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\right)}. \tag{45}$$

Remarquons (1') que

$$-\gamma + \frac{\varepsilon^2}{R} \equiv -\frac{\varkappa\mu_0}{3}a^3 - \frac{\varepsilon^2}{a} + \frac{\varepsilon^2}{R};$$

or $R > a$; donc, cette expression est *négative*; *il en résulte que* c_* *est plus petit que* c.

Il est facile de voir, en outre, qu'à grande distance de la sphère potentiante on retrouve la valeur c de la vitesse de la lumière dans le champ de Minkowski.

VII. Électron purement électrique. — Nous avons établi, dans une Note précédente (*), l'équation différentielle de la trajectoire d'un point électrisé dans le champ dû à un électron pur :

$$\boxed{p^2\left(\frac{d\frac{1}{R}}{d\varphi}\right)^2 = c^2\left(q - \frac{ee'}{4\pi c^3 m'_e R}\right)^2 - \left(1 + \frac{p^2}{R^2}\right)\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)\right]} \cdot \quad (46)$$

On remarquera que cette équation se déduit d'ailleurs immédiatement de (23), en y faisant $\mu_0 = 0$ dans la valeur de γ (voir 1').

Nous aurions pu établir également pour cet électron pur le théorème des aires et le théorème des forces vives généralisés par des calculs analogues à ceux développés ici dans les §§ IV et V. Il sera plus simple de déduire directement ces théorèmes des équations (34), (35) et (37), en faisant dans ces dernières $\mu_0 = 0$ et $M' = m'_e$.

On aura donc, pour *le théorème des aires* généralisé,

$$\boxed{R^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{q - \frac{ee'}{4\pi c^3 m'_e R}}\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)\right]}, \quad (47)$$

(*) Maurice Nuyens, *Trajectoire d'un point électrisé dans le champ dû à un électron pur.* [Bull. Acad. roy. de Belgique (Classe des sciences), octobre 1922.]

Une erreur typographique s'étant glissée dans l'équation [12] du complément V à la *Gravifique einsteinienne,* nous n'avons pas obtenu identiquement l'équation (46) écrite plus haut. Pour rectifier, il suffira, dans toutes les équations de la *Note concernant l'électron pur,* de remplacer la fonction

$$\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right]$$

par la suivante :

$$\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right].$$

et pour *le théorème des forces vives* généralisé :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left[1-\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)\right]\\&-c^2\left[1-\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)\right]^2+\frac{\left[1-\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)\right]^3}{\left(q-\frac{ee'}{4\pi c^3 m'_e R}\right)^2}=0.\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

On aura pour expression du carré de la vitesse généralisée du point électrisé en mouvement :

$$\boxed{v^2=c^2\left[1-\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)\right]-\frac{\left[1-\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)\right]^2}{\left(q-\frac{ee'}{4\pi c^3 m'_e R}\right)^2}}\,.\quad(49)$$

Proposons-nous enfin de chercher l'équation différentielle de *la trajectoire d'un rayon lumineux* dans le champ dû à un électron pur. Nous pourrions développer des calculs analogues à ceux exposés ici dans le § VI. Mais il sera plus simple encore de déduire directement cette équation de l'équation (42), en faisant dans cette dernière $\mu_0 = 0$ et $M' = m'_e$. Nous aurons

$$\boxed{p^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=c^2\left(q-\frac{ee'}{4\pi c^3 m'_e}u\right)^2-p^2u^2\left[1-\varepsilon^2u\left(\frac{1}{a}-u\right)\right]}\,.\quad(50)$$

Nous déduirons également de l'équation (45) l'expression du carré de la vitesse c_* de la lumière dans le champ dû à l'électron pur; nous aurons

$$\boxed{c_*^2=c^2\left[1-\frac{\varepsilon^2}{r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\right]}\,.\quad(51)$$