

29668

THÉORIE

531.256
G 999th

DE

L'ARC A DEUX ROTULES

PAR

E. GYSEN

Ingénieur, assistant à l'Université de Bruxelles

Extrait de la *Revue Universelle des Mines*,
n^{os} du 15 mars, 1^{er} avril, 15 avril et 1^{er} mai 1927
(7^{me} Série, t. XIV, n^o 2)

LIÈGE

IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE

4, Place St-Michel, 4

1927



BULLETIN

THÉORIE DE L'ARC A DEUX ROTULES

par E. GYSEN

Ingénieur, Assistant à l'Université de Bruxelles

INTRODUCTION

La littérature concernant l'arc à deux rotules à âme pleine est assez étendue. Parmi les auteurs de tout premier plan qui se sont occupés de ce système constructif particulièrement intéressant, citons, en France, Bresse et Maurice Levy, en Allemagne, Mohr et Müller-Breslau, Maxwell en Angleterre et Castigliano en Italie ; c'est pourquoi a question étant complètement élucidée, il est impossible de faire œuvre tout à fait originale en cette matière.

Il nous a paru intéressant de grouper un ensemble susceptible d'application pratique immédiate, tout en permettant la comparaison des méthodes de calcul. Parmi celles-ci, nous n'avons pas cru devoir rappeler la méthode de Bresse, car elle a cédé le pas à d'autres plus rapides, mais il se dégagera, de l'étude en question, certaines constatations intéressantes, concernant les méthodes modernes de la stabilité, basées essentiellement soit sur la théorie du travail virtuel, soit sur l'application des théorèmes relatifs aux dérivées du travail, soit sur celle du célèbre théorème de réciprocité de Maxwell-Betti. C'est pourquoi, estimant que la présente étude pourrait être utile et à l'étudiant et au praticien, nous nous hasardons à la publier.

ETUDE DE L'ARC A 2 ROTULES A AME PLEINE

I. — Détermination de la poussée horizontale

Nous supposerons que les rotules A et B sont de niveau et indéformables et nous nous limiterons au cas de la transmission directe d'une charge verticale.

L'extension au cas de la transmission indirecte est immédiate lorsque l'on connaît les propriétés des lignes d'influence. Il va de soi que le problème de la charge verticale mobile sera résolu à l'aide de ces lignes.

L'arc étant en équilibre sous l'action de la charge P et des réactions obliques R_A et R_B qu'elle provoque aux rotules A et B, nous le rendons libre aux fins de pouvoir lui appliquer les équations d'équilibre et,

dans ce but, nous introduisons comme forces de liaison : Y_A, X_A, Y_B, X_B , composantes coordonnées pour le système (xy) de R_A et R_B .

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} Y_A + Y_B - P = 0 \\ X_A + X_B = 0 \\ Y_A \cdot l - P \cdot b = 0. \end{cases}$$

On peut déterminer facilement Y_A et Y_B , qui sont les mêmes que pour une poutre droite, de portée (l) , appuyée simplement en A et en B. L'effet d'arc, la réaction horizontale ou « poussée » par laquelle on a :

$$X_A = -X_B$$

et dont nous noterons la valeur absolue X , reste donc la seule quantité qu'il est impossible de trouver par les voies ordinaires de la statique.

Le système considéré est donc une fois hyperstatique. Faisons appel, pour lever l'hyperstaticité à la théorie des dérivées du travail.

Vu les hypothèses de départ, nous pourrions écrire :

$$\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta X} = 0,$$

dont l'expression explicitée s'écrit en appelant : M , le moment fléchissant ; N , l'effort normal ; T , l'effort tranchant ; K , le coefficient de répartition uniforme de l'effort tranchant :

$$\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta X} = \int M_x \frac{\delta M_x}{\delta X} \frac{ds}{EI} + \int N_x \frac{\delta N_x}{\delta X} \frac{ds}{E\Omega} + \int T_x \frac{\delta T_x}{\delta X} \frac{ds}{KG\Omega} = 0.$$

Ces différents termes ont les valeurs suivantes :

1. Moments :

a) Partie de l'arc à gauche de la charge :

$$M_x = P \frac{b}{l} x - Xy \qquad \frac{\delta M_x}{\delta X} = -y.$$

b) Partie de l'arc à droite de la charge :

$$M_{x'} = P \frac{a}{l} x' - Xy' \qquad \frac{\delta M_{x'}}{\delta X} = -y'.$$

2. Effets normaux :

a) Partie de l'arc à gauche de la charge :

$$N_x = -P \frac{b}{l} \sin \alpha - X \cos \alpha \qquad \frac{\delta N_x}{\delta X} = -\cos \alpha.$$

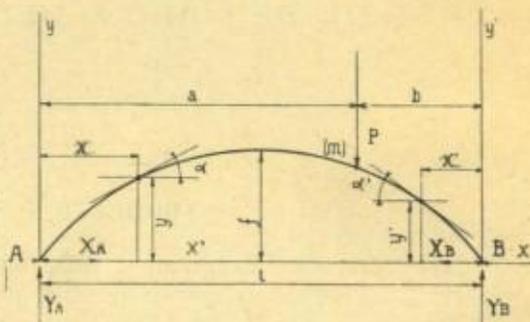


FIG. 1.

b) Partie de l'arc à droite de la charge :

$$N_{x'} = -P \frac{a}{l} \sin \alpha' - X \cos \alpha' \qquad \frac{\delta N_{x'}}{\delta X} = -\cos \alpha'$$

3. Efforts tranchants :

a) Partie de l'arc à gauche de la charge :

$$T_x = P \frac{b}{l} \cos \alpha - X \sin \alpha \qquad \frac{\delta T_x}{\delta X} = -\sin \alpha.$$

b) Partie de l'arc à droite de la charge :

$$T_{x'} = -P \frac{a}{l} \cos \alpha' + X \sin \alpha' \qquad \frac{\delta T_{x'}}{\delta X} = +\sin \alpha'.$$

On a finalement :

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\left(P \frac{b}{l} x - Xy \right) (-y) ds}{EI} + \int_0^b \frac{\left(P \frac{a}{l} x' - Xy' \right) (-y') ds}{EI} \\ & + \int_0^a \frac{\left(P \frac{b}{l} \sin \alpha + X \cos \alpha \right) (\cos \alpha) ds}{E \Omega} + \int_0^b \frac{P \left(\frac{a}{l} \sin \alpha' + X \cos \alpha' \right) (\cos \alpha') ds}{E \Omega} \\ & + \int_0^a \frac{\left(P \frac{b}{l} \cos \alpha - X \sin \alpha \right) (-\sin \alpha) ds}{KG \Omega} + \int_0^b \frac{\left(-P \frac{a}{l} \cos \alpha' + X \sin \alpha' \right) (\sin \alpha') ds}{KG \Omega} \\ & = 0. \end{aligned}$$

d'où, dans un cas tout à fait général, on tire la valeur de X.

Transformons cette formule à l'aide des expressions et des hypothèses simplificatrices suivantes :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \\ \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}. \\ \sin \alpha &= \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}} \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

1° L'arc se trouve dans un seul plan ;

2° On néglige les effets de T ;

3° On remplace ds par $\frac{dx}{\cos \alpha}$ et l'on introduit la section et le moment

d'inertie de comparaison constants I_c et Ω_c avec :

$$I_c = I \cos \alpha \quad \Omega_c = \Omega \cos \alpha.$$

4° L'arc est assez tendu pour que l'on fasse :

$$N_x = N_{x'} = X.$$

Rueb a pu tracer, d'après les études de W. Ritter, sur l'ellipse d'élasticité, un graphique reproduit fig. 2, donnant le pourcentage d'erreur que l'on commet, pour l'arc à deux rotules, lorsqu'on néglige les effets de N et de T .

En tenant compte de toutes ces conditions, l'expression établie précédemment se simplifie et devient :

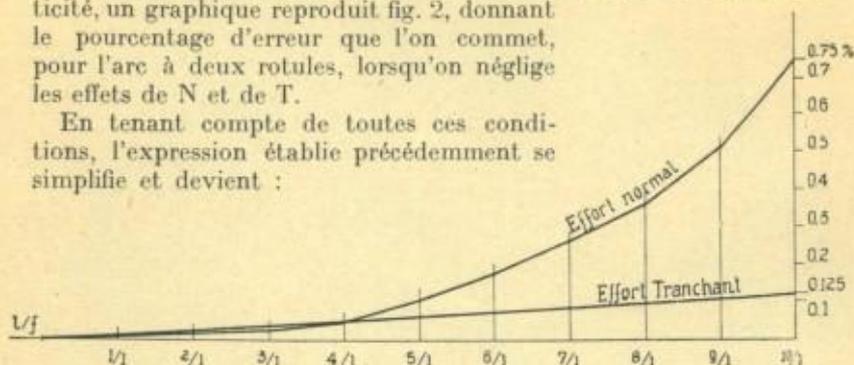


FIG. 2,

$$\begin{aligned} & - \int_0^a \frac{P \frac{b}{l} x y dx}{EI_c} - \int_0^b \frac{P \frac{a}{l} x' y' dx'}{EI_c} \\ & + \int_0^a \frac{X y^2 dx}{EI_c} + \int_0^b \frac{X y'^2 dx'}{EI_c} \\ & + \int_0^a \frac{X dx}{E \Omega_c} + \int_0^b \frac{X dx}{E \Omega_c} = 0. \end{aligned}$$

$y dx$ est une bandelette de la surface comprise entre l'arc et la corde.

$y \frac{x}{l} dx$ est la réaction verticale en B due à cet élément considéré comme poids.

De même $y' \frac{x'}{l} dx'$ est la réaction en A de l'élément $y' dx'$.

Donc $\left(y dx \frac{x}{l} \right) b$ et $\left(y' dx' \frac{x'}{l} \right) a$ sont les valeurs du moment en la section correspondant au point d'application de la charge P , produit par les surfaces de charge $y dx$ et $y' dx'$.

$y^2 dx$ peut s'écrire $2 \cdot \frac{y}{2} (y dx)$ et son intégrale vaut 2 fois le moment

statique de la surface comprise entre l'arc et la corde, pris par rapport à cette corde.

La formule précédente peut donc s'écrire :

$$X \left[\frac{1}{EI_c} \left(\int_0^a y^2 dx + \int_0^b y'^2 dx' \right) + \frac{1}{E \Omega_c} \left(\int_0^a dx + \int_0^b dx' \right) \right] \\ = \frac{P}{EI_c} \left[\int_0^a \left(y dx \cdot \frac{x}{l} \right) b + \int_0^b \left(y' dx' \cdot \frac{x'}{l} \right) a \right]$$

ou appelant S_{AB} le moment statique de la surface comprise entre l'arc et la corde par rapport à cette corde :

$$X = \frac{P}{EI_c} \left[\int_0^a \left(y dx \cdot \frac{x}{l} \right) b + \int_0^b \left(y' dx' \cdot \frac{x'}{l} \right) a \right] \\ \frac{1}{EI_c} \cdot 2 S_{AB} + \frac{I_c}{E \Omega_c} \cdot l$$

ou encore :

$$X = P \frac{\int_0^a \left(y dx \cdot \frac{x}{l} \right) b + \int_0^b \left(y' dx' \cdot \frac{x'}{l} \right) a}{2 S_{AB} + \frac{I_c}{\Omega_c} l}$$

Les deux intégrales du numérateur donnent le moment fléchissant d'une poutre sur 2 appuis de longueur (l) au point d'application de la charge lorsque l'on considère comme surface de charge la surface comprise entre l'arc et la corde. D'après les théorèmes généraux sur les moments fléchissants et les efforts tranchants, le moment fléchissant est l'intégrale double de la charge répartie.

Nous pourrions donc déterminer le moment dont question ci-dessus à l'aide d'une double intégration graphique de la surface comprise entre l'arc et sa corde.

Si nous voulons déterminer ce moment par la méthode du funiculaire, il faut diviser la surface de charge en bandelettes, opérer les concentrations des aires aux centres de gravité de ces bandelettes, tracer un polygone des forces et un funiculaire conjugué ; c'est la méthode des poids élastiques qui apparaît comme remplaçant la double intégration graphique.

Conclusion. — La ligne d'influence de X , qui suppose la variation de a ou b depuis o jusque (l), est obtenue soit par une double intégration graphique de la surface comprise entre l'arc et la corde, soit par la méthode des poids élastiques appliquée à cette même surface de charge.

II. — Obtention d'une formule approchée
donnant la poussée X pour un axe de forme quelconque

Transformons l'expression :

$$\int_0^a y dx \frac{x}{l} b + \int_0^b y' dx' \frac{x'}{l} a$$

qui figure au numérateur de la valeur de X.

Elle devient, en mettant $\frac{ab}{l}$ en évidence :

$$\frac{ab}{l} \left[\int_0^a \frac{y}{a} x dx + \int_0^b \frac{y'}{b} x' dx' \right]$$

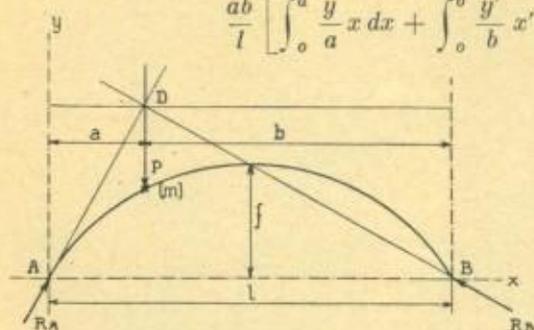


FIG. 3.

Si nous projetons l'ordonnée y de l'arc en un point C sur l'alignement de la charge et si nous joignons AC, cette droite découpe sur l'ordonnée (y), à partir de la corde, la distance $\frac{y}{a} x$. On peut donc,

pour une position déterminée de la charge, tracer la transformée de l'arc, c'est-à-dire le lieu des points tels que c'. L'expression ci-dessus est alors, pour la position envisagée de P, représentée par l'aire de cette transformée multipliée par $\frac{ab}{l}$.

En bonne approximation, cette aire peut se remplacer par celle du triangle ADB, c'est-à-dire par $y_P \cdot \frac{l}{2}$ et l'expression approchée de la poussée vaut alors :

$$X = P \frac{a \cdot b \cdot y_P}{2 \left[2 S_{AB} + \frac{l_c}{\Omega_c} l \right]}$$

III. — Remarque importante

La solution que nous venons de trouver ne s'applique pas uniquement à l'arc à deux rotules. L'obtention de la ligne d'influence de la poussée X par une double intégration graphique de la surface comprise entre l'arc et la corde s'applique aussi aux poutres à béquilles à deux rotules, tant polygonales que rectangulaires, et à l'ensemble des poutres armées une fois hyperstatiques, c'est-à-dire des poutres à âme pleine sur deux appuis raidies par des tirants et des poussards. Tous ces systèmes parmi lesquels figurent les ponts suspendus à poutre raidisseuse découlent, par variation de la longueur, du nombre et des

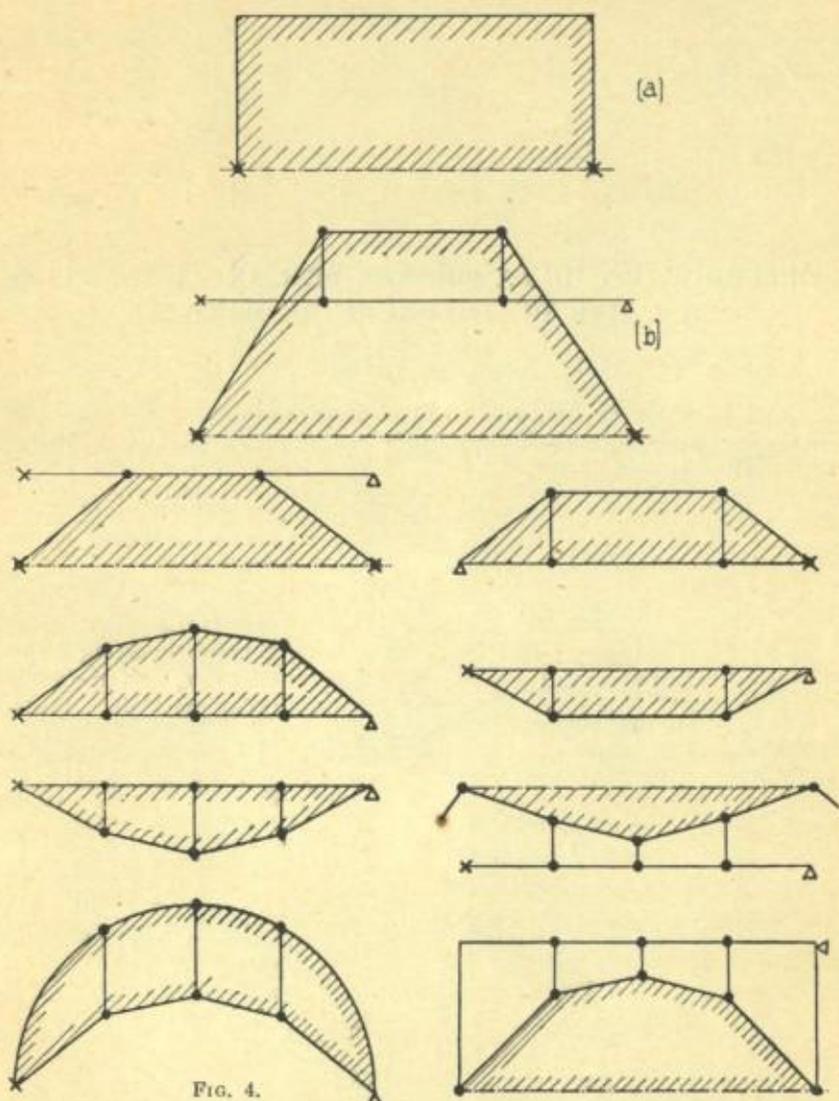


FIG. 4.

dispositions des éléments de raideur, du système fondamental indiqué à la figure par la lettre *b* ; les contours hachurés délimitent les surfaces de charge qu'il suffit d'intégrer deux fois.

Notons, en particulier, que l'on peut tracer immédiatement la ligne d'influence pour la poutre à béquille rectangulaire ; la surface de charge de celle-ci étant un rectangle, la double intégrale qui est la ligne d'influence de *X* est une parabole du 2^e degré.

Le dénominateur de l'expression de *X* conserve dans tous ces cas sa même signification.

(A suivre).