

La modélisation gravitaire appliquée au géomarketing

Introduction

Les modèles gravitaires sont utilisés en géomarketing dans le cadre de deux objectifs liés : la délimitation des zones de chalandise et la détermination de la part de marché à l'intérieur de la zone de chalandise, deux étapes classiques de la détermination d'un chiffre d'affaire potentiel (voir p. ex. Ghosh & McLafferty, 1987, Jones & Simmons, 1990).

Première partie : présentation

La délimitation des zones de chalandise par les polygones de Thiessen

La méthode la plus simple pour déterminer la zone de chalandise d'un magasin par rapport à ses concurrents ou d'une ville par rapport à d'autres est de supposer que le chaland se dirige vers l'offre la plus proche. Dans ce cas, les zones de chalandise sont délimitées par des segments de droite situés à égale distance des deux points d'offre concurrents. Ces polygones sont attribués à Thiessen, qui les a proposés en 1911 dans le contexte tout à fait différent du calcul de précipitations (Thiessen, A.H. & Alter, J.C., 1911). Pour définir la zone de chalandise d'un point d'offre, il s'agit de relier celui-ci aux points d'offre concurrents par des droites et de construire les perpendiculaires au milieu de chaque segment (médiatrices). Le polygone qui contient le point d'offre considéré est le lieu géométrique des points situés plus près de ce point d'offre que de tout autre et est interprété ici comme sa zone de chalandise. Cette méthode est évidemment très simple puisqu'elle néglige toute différence d'attractivité ou d'importance entre les points d'offre et toute hétérogénéité de l'espace (réseaux routiers, obstacles, ...). Elle fournit néanmoins une première approche et la prise en compte exclusive de la distance comme critère de sélection peut être utile dans certains raisonnements ([fig. 1](#)).

Les volumes de population dans les zones ainsi délimitées pour les 91 noyaux commerciaux¹[1] majeurs hors centres-villes des 17 principales régions urbaines en

[1] Les noyaux sont des regroupements de commerces délimités sur place au moyen d'un critère de densité. Ce critère, mis au point précédemment dans le cadre du Plan Régional d'Affectation du Sol de la Région de Bruxelles-Capitale, est le suivant: pour avoir l'impression d'être dans un noyau commercial plutôt que face à du commerce dispersé, il faut qu'il y ait au moins un commerce pour trois façades.

Belgique (Grimmeau & coll., 2003) s'étalent de moins de 7.000 à près de 100.000! La corrélation calculée entre cet effectif et la proportion de commerces vides dans ces noyaux est de -0,247, ce qui en fait une des variables corrélées significativement ($\alpha = 5\%$) à cet indicateur de santé du commerce alors que la moitié des variables explicatives potentielles ont du être écartées. Plus il y a d'habitants dans le polygone de Thiessen, plus est donc faible la proportion de cellules commerciales vides. Le nombre d'habitants dans le polygone de Thiessen intègre ici la concurrence (par la surface) et la densité de peuplement.

La délimitation des zones de chalandise par le modèle de Reilly

Le modèle proposé par Reilly dès 1929 (Reilly, 1929, 1931) est directement inspiré par la loi de Newton : il suppose que l'attraction commerciale de deux villes en un point soit proportionnelle à leur population et inversement proportionnelle au carré de leur distance à ce point, ce qui permettrait de définir laquelle des deux villes est la plus influente en ce point. Ce modèle a été remanié et développé par de nombreux auteurs. Actuellement, on peut le présenter de la façon suivante.

On définit une **fonction d'utilité** (U), qui estime l'utilité d'un point d'offre (i) pour un client potentiel (j), en fonction de l'attractivité du point d'offre (A_i) et de la distance par rapport au client potentiel (d_{ij}). Selon la proposition de Reilly, l'utilité serait directement proportionnelle à l'attractivité du point d'offre et inversement proportionnelle au carré de la distance (**modèle gravitaire**). Par rapport au modèle précédent, celui-ci prévoit que les consommateurs vont accepter de couvrir une distance plus grande pour accéder à un point d'offre qui leur semble plus susceptible de les satisfaire.

$$U_{ij} = k \cdot \frac{A_i}{d_{ij}^2}$$

L'**attractivité** du point d'offre est généralement mesurée par sa surface de vente ou par le nombre de commerce du type considéré ou, à défaut pour une ville, par sa population. Il est évident que ce ne sont pas les seuls aspects qui jouent : le choix et la qualité des produits, les prix, la qualité du service ou de l'accueil, l'ambiance ou le confort du magasin, les possibilités d'activités combinables dans un même déplacement, etc. interviennent dans les décisions individuelles mais sont difficiles à prendre en compte dans un modèle²[2]. La **distance** est généralement calculée à vol

²[2] Voir le modèle MCI (*multiplicative competitive interaction*) proposé par Nakanishi & Cooper et présenté entre autres dans : Cliquet, G. (1992), pp. 102-112.

d'oiseau (distance euclidienne). Mais la simple somme des différences absolues de coordonnées en x et en y peut paradoxalement être plus réaliste : très utilisée aux Etats-Unis, elle rend compte de l'impossibilité fréquente de se déplacer autrement que selon un méridien ou un parallèle (distance dite *de Manhattan*). Des distances-temps et des distances-coûts (incluant une contre-valeur monétaire du temps nécessaire, tenant compte de la perception individuelle de la valeur du temps) sont parfois considérées.

Avec ce modèle, et en utilisant la distance euclidienne, le lieu géométrique des points pour lesquels un point d'offre a la même utilité est évidemment un cercle centré sur celui-ci (**isodyne**).

Si l'on trace les isodynes correspondant à des points d'offre concurrents, l'intersection de deux isodynes de même valeur définit deux points où l'utilité des deux points d'offre est égale. En recommençant l'opération pour les autres paires d'isodynes, on définit successivement d'autres points où l'utilité des deux points d'offre est égale. En les reliant, on approche le lieu géométrique des points où les utilités de deux points d'offre s'égalisent. Là où il n'y a pas d'autre point d'offre dont l'utilité serait supérieure, ce lieu géométrique constitue une partie de la **limite de la zone de chalandise** entre les deux points d'offre : si les consommateurs maximisent leur utilité, ils iront à un des points d'offre considéré d'un côté de la ligne, à l'autre de l'autre ([fig. 1](#)).

Cet exercice montre que la limite de la zone de chalandise entre deux points d'offre concurrents est un (arc de) cercle. On peut déterminer analytiquement les coordonnées de son centre et son rayon. Les coordonnées de ce centre se calculent à partir des coordonnées X et Y des deux points d'offre (1 et 2) et de leurs attractivités A :

Pour $A_1 > A_2$ ^[3] :

$$\frac{\frac{A_1}{A_2} \cdot X_2 - X_1}{\frac{A_1}{A_2} - 1}, \frac{\frac{A_1}{A_2} \cdot Y_2 - Y_1}{\frac{A_1}{A_2} - 1}$$

Le centre du cercle est situé sur la droite passant par les deux points d'offre, au-delà du plus petit des deux en terme d'attractivité.

Le rayon du cercle se calcule à partir des attractivités des points d'offre et de la distance qui les sépare :

^[3] Cette condition n'est en fait nécessaire que pour que le rayon soit positif!

$$r = \frac{d_{1,2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}}{\frac{A_1}{A_2} - 1}$$

On voit que si les attractivités des deux points d'offre sont égales, le rayon du cercle et la distance du centre deviennent infinis : la limite est alors une droite. Vu l'égalité de l'attractivité des points d'offre, elle doit être située à mi-distance de ceux-ci et perpendiculaire à la droite qui les joint, ce qui nous renvoie logiquement aux polygones de Thiessen.

Estimer la qualité de la desserte commerciale avec le modèle de Reilly

La qualité de la desserte commerciale varie spatialement : un lieu situé près de plusieurs commerces est mieux desservi que si il n'y en avait qu'un ou que si ils étaient éloignés. Le modèle de Reilly permet d'estimer cette qualité par la somme en un point des utilités des différents points d'offre :

$$D_j = \sum_i \frac{A_i}{d_{ij}^2}$$

Cette somme est appelée le **potentiel** du point. Elle peut se cartographier. Puisqu'elle peut se calculer en tout point, la technique des courbes de niveau est généralement utilisée.

Estimer les parts de marché avec le modèle de Huff

Le modèle de Huff s'appuie sur le modèle de Reilly. La contribution de Huff consiste à proposer d'estimer la probabilité que les consommateurs d'un lieu soient clients d'un point d'offre en faisant le rapport entre l'utilité de ce point d'offre pour ces consommateurs et la somme des utilités de tous les points d'offre concurrents pour ces mêmes personnes. On reconnaît dans cette somme des utilités la notion de potentiel introduite plus haut.

$$P_{ij} = \frac{\frac{A_i}{d_{ij}^2}}{\sum_k \frac{A_k}{d_{kj}^2}}$$

où i est le lieu d'offre considéré, faisant partie de l'ensemble des lieux d'offre désignés par k ; la résidence des consommateurs est notée j . Il est possible de cartographier ces probabilités.

On peut déterminer bien sûr les limites des zones pour lesquelles c'est un même point d'offre qui capte la plus grande part du marché. On délimite ainsi des zones de chalandise, qui sont exactement les mêmes que celles fournies par le modèle de Reilly : le fait de diviser les utilités de différents points d'offre en un point par la même valeur de potentiel ne change évidemment pas l'identité du point d'offre dominant.

L'apport du modèle de Huff est de ne plus considérer que les consommateurs se partagent clairement de part et d'autre de la limite de la zone d'influence mais plutôt qu'il y a un continuum de situations. Du côté intérieur de la limite de la zone de chalandise, la probabilité que le consommateur aille vers le point d'offre interne à la zone est la plus forte et ce n'est plus le cas de l'autre côté de cette limite; mais ces probabilités ne sont pas 1 et 0. Autrement dit, à l'intérieur de la zone de chalandise, il y a une probabilité non nulle de se diriger vers d'autres points de vente et, au voisinage de la limite, cette probabilité peut être, pour le point d'offre concurrent adjacent, du même ordre de grandeur (à peine inférieure). Et du côté extérieur de la limite de la zone de chalandise d'un point d'offre, la probabilité de le fréquenter est non-nulle et peut même être du même ordre de grandeur que celle correspondant au point d'offre adjacent.

La probabilité fournie par le modèle de Huff est indifféremment interprétée comme la part des individus du lieu j qui feront leurs achats en i , comme la part des achats qu'un individu fera au point d'offre (zapping) ou comme la part des achats que les individus du lieu j feront en i .

En conséquence, le modèle de Huff est fréquemment utilisé pour estimer des parts de marché et des chiffres d'affaire potentiels. Si l'on connaît dans des (petits) territoires, le volume de dépenses pour le type de biens que l'on vend (par exemple : nombre de ménages \times revenu moyen des ménages \times part du revenu qui est affectée au type de biens considéré), il suffit de le multiplier par la part, estimée par la probabilité du modèle de Huff, pour avoir une estimation de chiffre d'affaire dans ce territoire; la somme de ces valeurs sur les différents territoires donne le chiffre d'affaire théorique recherché.

Le modèle de Huff est aussi beaucoup utilisé pour l'étude des concurrences, qu'elles soient externes ou internes. [La figure 2](#) simule au moyen du modèle de Huff la concurrence interne entre les différents sièges de l'Inno; outre les quatre sièges bruxellois, ceux de Louvain, Malines, Gand et Charleroi influencent la forme des courbes.

Estimer empiriquement l'effet de la distance et de l'attraction

L'effet de la distance sur les comportements varie selon le type de biens ou de services. On parle d'une différence de **friction de la distance**. Par exemple, dans une étude empirique, la distance à laquelle 80% de la clientèle sont réunis valait 4,2 km pour les supermarchés, 7,9 km pour les agences bancaires et 10 km pour les maisons de repos. De même, on peut imaginer que l'effet de l'attraction (mesurée par la surface commerciale ou par le nombre de commerces) sur l'utilité ne soit pas linéaire, qu'une attraction plus forte augmente l'utilité dans une mesure plus que proportionnelle (ce qui est souvent affirmé) ou au contraire moins que proportionnelle. Le modèle devient alors :

$$U_{ij} = k \cdot \frac{A_i^a}{d_{ij}^b}$$

où b représente la friction de la distance : plus b est grand, plus la friction de la distance est importante. De même, a mesure l'**élasticité** de l'influence de l'attractivité sur l'utilité : si a est supérieur à 1, une variation de l'attractivité entraîne une variation plus forte de l'utilité; inférieur à 1, moins forte. Les paramètres a et b s'estiment généralement par régression multiple linéaire après transformation logarithmique, à partir du taux de pénétration (nombre de clients pour 1000 ménages) comme estimateur de l'utilité. Alors :

$$\log(U_{ij}) = \log(k) + a \log(A_i) - b \log(d_{ij})$$

Ce mode d'estimation n'est cependant pas parfait. Les paramètres obtenus diffèrent généralement de ceux estimés directement par minimisation des carrés des écarts dans la formule originale (sans transformation). En fait, la transformation logarithmique a pour conséquence que l'on minimise la somme des carrés des écarts de logarithmes, ce qui vient en quelque sorte à minimiser une erreur relative. Les coefficients de détermination (R^2) sont souvent meilleurs après transformation logarithmique mais n'ont pas la même signification : l'amélioration apparente est souvent illusoire.

D'après Beguin & Thill (1985), on a pu démontrer que l'introduction des paramètres a et b ne change pas la forme des limites de zone d'influence entre deux points d'offre et que les limites ne dépendent que du rapport a/b. En posant, toujours avec $A_1 > A_2$, :

$$Q = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\frac{a}{b}}$$

les coordonnées du centre du cercle et son rayon deviennent respectivement :

$$\left(\frac{Q^2 x_2 - x_1}{Q^2 - 1}, \frac{Q^2 y_2 - y_1}{Q^2 - 1} \right)$$

$$r_{1c} = \frac{Q d_{12}}{Q^2 - 1}$$

On vérifiera que, si l'on pose $a = 1$ et $b = 2$, on retrouve évidemment les formules de base vues plus haut.

Si des modifications coordonnées de a et de b telles que a/b reste constant ne modifient pas les limites des zones d'influence selon Reilly (et donc selon Huff), elles modifient cependant les probabilités selon Huff et donc les parts de marché. Il n'est donc pas impossible de trancher empiriquement entre un effet de friction de la distance et un effet d'élasticité de l'attractivité!

Deuxième partie : Applications et Commentaires

Application du modèle de Reilly à Bruxelles

Définir les zones de chalandise n'a de sens que par rapport à un type de bien ou à un niveau hiérarchique. Plus les biens sont rares, plus les zones de chalandises sont étendues. Les cartes des limites des zones de chalandise des principaux noyaux commerciaux bruxellois ([fig. 1](#)) ont été construites en prenant comme attractivité le nombre de commerces des types caractéristiques respectivement des niveaux 3 et 4 de la hiérarchie des noyaux dans la ville, le 4 correspondant aux deux noyaux majeurs, rayonnant largement hors de la ville, et le 3 aux 31 autres noyaux majeurs, comptant entre 100 et 400 commerces. Les commerces caractéristiques du niveau 4 sont par

exemple les grands magasins (Inno), la confection, les chaussures, les disquaires, ... et du niveau 3 les photographes, opticiens, parfumeurs, bijoutiers, teinturiers, etc. (Grimmeau, 1987). Les noyaux ont été délimités sur base de la continuité de la densité commerciale (Grimmeau & coll., 2003). Les cartes montrent que la concavité de la limite est toujours tournée vers le noyau le moins important, que les petits noyaux peuvent avoir une zone de chalandise entièrement contenue dans celle d'un noyau plus important et que des grands noyaux peuvent avoir une zone de chalandise morcelée parce qu'elles exercent une influence dominante au-delà d'un autre noyau moins important; par exemple, sur la carte du niveau 3, le haut de la ville (27) rayonne légèrement au-delà des noyaux 18 (cimetière d'Ixelles) et 24 (Bascule) et le centre-ville (26) plus loin encore.

Au niveau 4, une des observations principales est la limite en arc de cercle très ouvert qui traverse la ville d'est en ouest. C'est la limite entre les influences des noyaux du centre-ville (26; 2.800 commerces) et du haut de la ville (27; 1.400). Ceci confirme que l'on a là les seuls noyaux commerçants susceptibles d'exercer une large attraction extérieure à la ville. La limite ne doit évidemment pas faire illusion : le choix entre ces deux quartiers se fait sur d'autres critères que la proximité, notamment le standing. Une seconde observation est que ce sont les noyaux proches qui soutiennent le plus difficilement la concurrence de ces deux quartiers. Certains noyaux n'offrent visiblement aucun service à ce niveau (10, 13, 19). Les zones d'influence des quartiers périphériques sont beaucoup plus grandes (ce qui ne veut pas nécessairement dire plus peuplées), malgré la prise en compte ici des noyaux périphériques majeurs (on voit d'ailleurs, au point le plus au nord un fragment de la zone de chalandise de Vilvorde).

Au niveau 3, le seul noyau dont l'influence s'étend hors de la ville est celui du centre-ville. La zone d'influence du haut de la ville est ici beaucoup plus réduite. L'examen des effectifs de commerces de ces deux noyaux par niveau permet d'expliquer cette observation : ces deux noyaux comptent des effectifs comparables de commerce de niveau 4 (445 et 410), mais le centre-ville compte encore plus de commerces de niveau 3 que le haut de la ville (640 contre 316). La structure commerciale du centre-ville est beaucoup plus diversifiée que celle du haut-de-la-ville, fortement concentré sur le luxe (vêtements, chaussures, maroquinerie, parfums, bijoux). Ces deux quartiers comptent très peu de commerces des niveaux 1 et 2.

Sensibilités et limites

Le transfert de la loi de Newton à l'attraction commerciale n'est cependant pas simple. Si la taille des planètes est négligeable par rapport à la distance qui les sépare, il n'en va pas de même pour les lieux commerciaux (Grimmeau, 1994). Les assimiler à un point n'est souvent pas satisfaisant. Si la ville ou le noyau commercial est sensiblement plus grand que la partie fréquentée par les consommateurs localisés en un point, on risque de surestimer la distance qu'ils vont parcourir (ils se limiteront à la marge du noyau ou aux noyaux périphériques de la ville) et de sous-estimer l'attractivité du noyau ou de la ville (en comptant des commerces situés à l'autre bout et qui ne seront pas fréquentés). Morceler de tels espaces n'est pas une solution commode parce que plusieurs découpages sont possibles et que le choix est arbitraire et influence les

résultats. Enfin, les résultats sont sensibles à la position que l'on donne au point symbolisant le lieu commercial.

Références

Beguin, H. & Thill, J.C. (1985) Les aires de rayonnement des villes belges, l'utilité d'une approche théorique, Bulletin du Crédit communal, 154, pp. 205-215.

Cliquet, G. (1992) Management stratégique des points de vente, Sirey, 315 p.

Ghosh, A. & McLafferty, S.L. (1987) Location strategies for retail and service firms, Lexington Books, 212 p.

Grimmeau, J.P. (1987) Affinités spatiales et facteurs de localisation du commerce de détail dans la ville, Recherches de géographie urbaine, Hommage au professeur J.A. Sporck, Société géographique de Liège, pp.301-316.

Grimmeau, J.P. (1994) Le modèle gravitaire et le facteur d'échelle. Application aux migrations intérieures de la Belgique 1989-1991, Espace, Populations, Sociétés, 1, pp.131-141.

Grimmeau, J.P. & coll. (2003) Le commerce de détail dans les grandes villes belges et leurs périphéries, Bruxelles, Politique des grandes villes.

Jones, K. & Simmons, J. (1990) The retail environment, Routledge, 492 p.

Reilly, W.J. (1929) Methods for the study of retail relationships, University of Texas, Bulletin, 2944.

Reilly, W.J. (1931) The law of retail gravitation, New York.

Thiessen, A.H. & Alter, J.C. (1911) Precipitation averages for large areas, Monthly weather review, 39, pp. 1082-1084.

Auteurs :

J.P. Grimmeau et B.Wayens
Université Libre de Bruxelles
Institut de Gestion de l'Environnement et d'Aménagement du Territoire (IGEAT)
Cellule Géographie Appliquée et Géomarketing
Contact : grimmeau@ulb.ac.be

Date : 22/04/03

www.iaq.asso.fr

Bruxelles

Définition des aires de marché théoriques des quartiers commerçants de niveau III et IV par les polygones de Thiessen et le modèle de Reilly

1. Thiessen

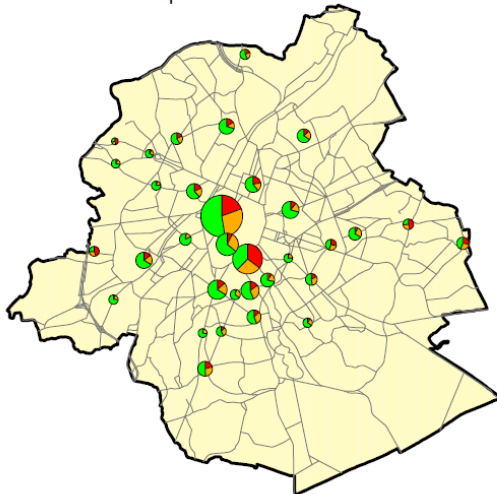


2.a. Reilly (sur base du nombre de commerces de niveau III)



0 2.5 5 km

3. Répartition des commerces selon le niveau de la hiérarchie dont ils sont caractéristiques



2.b. Reilly (sur base du nombre de commerces de niveau IV)



Commerces actifs: 2000
1000
500

Niveau hiérarchique: niveau IV
niveau III
autre

Généralités: grands axes routiers

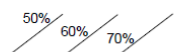


Bruxelles

Estimation par un modèle de Huff des parts de marché théoriques des grands magasins bruxellois sur base de leur surface de vente

1. Magasin dominant et part de marché maximale

Courbe d'égale probabilité

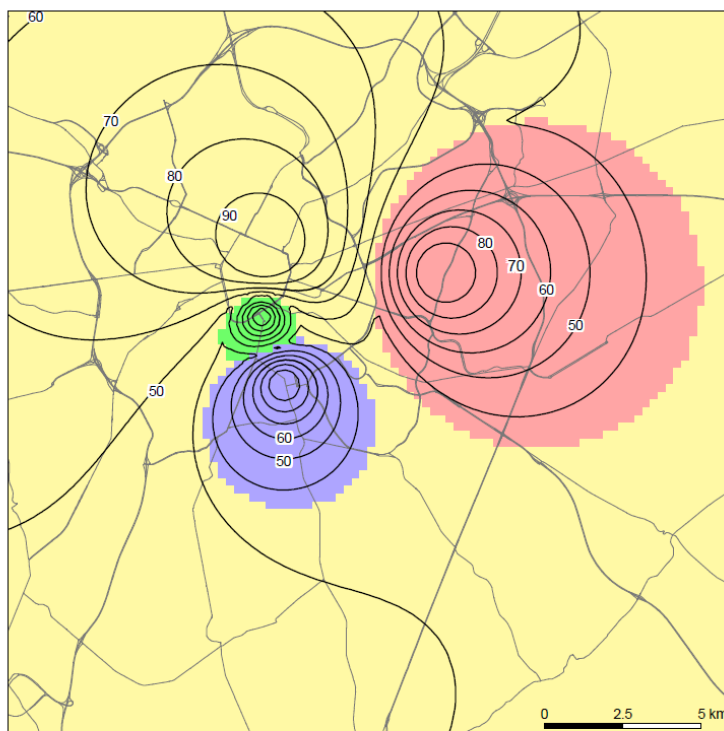


Magasin dominant

- Uccle Bascule
- Bruxelles (rue Neuve)
- Bruxelles (Louise)
- Woluwe

Généralités

— grands axes routiers



2. Part de marché du magasin de la rue Neuve

