UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

SUR LES EXTENSIONS DE MODULES FILTRÉS

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Mathématiques.
(Grade légal)

Claude LEMAIRE

1 9 6 7

TABLE DES MATIERES

PREFACE

Partons de la situation classique de vectoriel normé sur un champ valué non-archimédien réel :
I : A, + est un vectoriel sur le champ K et deux fonctions w et v sont définies, w de K dans R^+ (réels positifs), v de A dans R^+ avec les conditions :

(1) $w(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$; $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
(2) $w(k_1-k_2) \leq \max(w(k_1), w(k_2))$; $v(a_1-a_2) \leq \max(v(a_1), v(a_2))$.
(3) $w(k_1.k_2) = w(k_1).w(k_2)$; $v(ka) = w(k).v(a)$

Trois points de cette définition doivent être mis en évidence :

a. La nature algébrique de K, A, + : ici module (sans torsion évidemment) sur un champ.
b. L'axiome I (3)
c. La structure de R^+ : groupe totalement ordonné R^+_o augmenté d'un absorbant minimum.

I' : Une généralisation qui n'apporte pas de grandes difficultés supplémentaires consiste à remplacer R^+_o par un groupe abélien totalement ordonné I, ., $\leq$ (valuations de Krull) ou même K par un corps et c par :

c' : w et v prennent leurs valeurs dans un groupe I totalement ordonné.

II : En étudiant ces cas classiques (I, I'), on est amené à introduire les boules-unités (comme le fait Lazard [21]) ; et b, c' sont encore vérifiés et a est remplacé par :

a' : R est un domaine d'intégrité et A un R-module sans torsion.

Ce système d'axiomes convient aussi aux modules sans torsion et sans éléments complètement divisibles sur un anneau principal muni d'une filtration p-adique.

Dès que nous considérons la situation pourtant très voisine d'un p-groupe muni de la filtration p-adique ou des algèbres de fonctions comme celles étudiées dans [14] dans le cas complexe, nous constatons que le cadre des axiomes a', b, c' craque. En fait, il en est ainsi du moment que a' est remplacé par :

a_o : R est un anneau unital avec éventuellement des diviseurs de zéro et A un R-module qui n'est pas nécessairement sans torsion.

Aussi les recherches prennent-elles deux directions différentes :
III_1 : La plus courante -celle des exemples cités plus haut, celle aussi des "modules filtrés" étudiés par Bourbaki [5] - consiste à garder c' et à remplacer b par un axiome plus faible :

b' : $w(r_1.r_2) \leq w(r_1).w(r_2)$; $v(r_1 a) \leq w(r_1).v(a)$

Pour limiter les dégats, on peut introduire une hypothèse supplémentaire du genre de celle introduite par Benz [1] pour une classe d'anneaux particuliers :

d : $\forall r \in R$, $\exists r' \in R$ tel que $w(r) = w(r')$
et $\forall r'' \in R$, $w(r'r'') = w(r').w(r'')$.

III_2 : Une autre possibilité est de conserver b et d'affaiblir c' en le remplaçant par :

c'' : $I, ., \leq$ est un monoïde totalement ordonné.

C'est ce qu'on fait Hion [18] et divers élèves de M.Krasner (communications personnelles et [9]).

Si nous rassemblons les deux points de vue, nous obtenons la situation :
III : $A, +$ est un module unital sur l'anneau unital R (a_0)
$I, ., \leq$ est un monoïde totalement ordonné (c'')
w et v sont deux fonctions de R et A respectivement dans I avec les propriétés I(1), I(2), b' et
d_S: A est S-valué : $S \subset R$, et $\forall s \in S$, $\forall a \in A$, $v(sa) = w(s).v(a)$
En jouant sur les structures algébriques de R et de I sur S, on obtient les situations précédentes comme cas particuliers.

IV : Fuchs [11] et Yakabe [28] ont introduit des structures dans lesquelles c" est encore affaibli en :

c_0 : I est un monoïde partiellement ordonné.

Un exemple que nous utiliserons est la filtration d'ordre : si A est un groupe abélien, v est la fonction de A dans $\omega, . \simeq \mathbb{Z}, ./\{1, -1\}$ qui à a associe son ordre.
Si R n'est pas principal, on ne peut définir v comme fonction de A dans le quotient de R par le groupe des unités. Pour tenir compte de ce cas, et de plusieurs autres où apparaît une difficulté de même nature, nous allons renverser le point de vue comme dans [5] .

V : Gardant a_0 et c_0, nous appelons filtration de R une fonction croissante de $I, ., \leq$ dans l'ensemble $T(R), \subset$ des sous-groupes additifs de R, notée par indices et satisfaisant aux conditions :

$R_0 = 0$, $R_i.R_j \subset R_{i.j}$.

De même, une filtration de A, celle de R étant fixée, est une fonction croissante de I, ., $\leqslant$ dans T(A)$\subset$ avec
$$A_0 = 0,\ R_i . A_j \subset A_{i.j}$$
IV est un cas particulier de V : on pose
$$A_i = \{ a \in A \mid v(a) \leqslant i \},\ \text{etc...}$$
Réciproquement dans la situation V, on peut construire la fonction v : $v(a) = \{ i \in I \mid a \in A_i \}$ et de même pour w. Mais ce sont en général des fonctions dans $\mathcal{P}(I)$ qui ne peuvent être ramenées à des fonctions dans I ($v(a)$ est un idéal de I, c'est-à-dire une partie K de I telle que $i \in K$ et $j \geqslant i$ entraîne $j \in K$).
Dans IV, $v(a) = \{ i \in I \mid i \geqslant i_0 \}$; A est un module <u>proprement filtré</u>.
En fait, V est beaucoup plus général que IV ; on peut lui ramener les situations suivantes :

1. Les filtrations généralisant les filtrations p-adiques, comme la fonction de ω dans T(G), G groupe abélien, qui à n associe nG, utilisée notamment dans la théorie des quasi-isomorphismes.
2. Les modules munis d'une filtration d'ordre.
3. Les modules ultramétriques décrits par Krasner [20] .
4. Si M est un module donné, la structure formée d'un module A et du système des sous-modules de A, noyaux des homomorphismes de A dans M (utilisés pas Charles [8]).
5. Les modules linéairement topologisés et d'autres situations topologiques (chapitre 7).
6. D'une façon générale, beaucoup de cas où l'on doit considérer une famille de sous-groupes de A, + (ensemble des sous-groupes d'indice fini par exemple).

A l'exception de la première, ces situations seront décrites par la notion de <u>catégorie simple</u> (1.2.9.) où I comprend 1 et 0, $ij = 0$ pour $i \neq 1$, $j \neq 1$, $R_i = 0$ pour $i \neq 1$, $R_1 = R$.
Les cas les plus intéressants pour notre théorie sont précisément ce cas simple et la situation III (surtout avec I unital et $w(1) = 1$).
La généralisation V présente l'intérêt d'être transmissible sans difficulté à la somme directe et au complété (ce qui est aussi vrai pour III mais non pour IV) et surtout aux quotients (ce qui n'est vrai ni pour III ni pour IV)
Il faut noter qu'elle n'augmente pas sensiblement les difficultés des recherches.

Fixons maintenant I, ., $\leq$ et R et prenons sur R une filtration fixe.
Les modules filtrés peuvent être pris comme objets d'une catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ dont les morphismes de A dans B sont les R-homomorphismes h tels que $h(A_i) \subset B_i$ pour tout i.
Un module filtré A possède une topologie naturelle de groupe abélien : celle engendrée par les A_i [3] .
La catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ est introduite et brièvement étudiée dans le chapitre 1.
C'est un exemple de catégorie quasi-abélienne au sens de Yoneda [29] (3.2.1.)

Notre but est l'étude des extensions dans $\mathcal{M}(R,I)$.
Dans les quatre chapitres du début, nous travaillons sur la notion d'extension B de A par C : suite exacte de R-modules filtrés

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0, \quad h(A_i) = h(A) \cap B_i \ ; \ g(B_i) = C_i$$

Ensuite nous considérons des extensions données par un sous-module A et un procédé de construction, le quotient ne jouant ici qu'un rôle auxiliaire.
C'est la manière de voir des chapitres 5 et 6.

Si A et C sont donnés, nous pouvons prolonger la méthode traditionnelle de Schreier [12] et décrire toute extension par un triple (f, u, t), f système de facteurs de C dans A, u fonction de R x C dans A, $t = \{t_i\}$, t_i fonction de C_i dans $A^i = A/A_i$ réalisant les conditions détaillées en 1.3.
Naturellement, nous devons classer ces extensions suivant une relation d'équivalence adéquate et nous pouvons munir l'ensemble Ext(C, A) des classes d'une loi de groupe abélien.

Au chapitre 2, nous examinons des types particuliers d'extensions qui s'imposent à nous, soit par la simplicité relative de leur description en triples (f, u, t), soit par leurs liens avec les situations III et IV.
A ce sujet, nous démontrons aisément que dans les cas les plus intéressants, on obtient le même groupe Ext si on suppose A et C proprement filtrés (IV) ou S-valués (d_0) et que l'on exige des extensions qu'elles réalisent ces mêmes conditions (2.3, 2.5).

D'autre part, nous étudions les <u>extensions D-linéaires</u> (D sous-anneau de R), c'est-à-dire qui possèdent un système de représentants D-linéaire. Leurs classes forment un sous-groupe $Ext^D_O (C, A)$ de $Ext(C, A)$.
Toute extension D-linéaire peut être caractérisée par un triple (O, u, t) où u et t sont simplifiés.
Si D = R, on peut choisir u = O et les t_i additifs (2.1.)

En face des extensions D-linéaires, nous définissons les <u>extensions régulières</u> : ce sont les extensions pour lesquelles il existe un système de représentants b(c) de C dans B avec $v(b(c)) = v(c)$.
La régularité n'est pas une notion nouvelle : elle a été utilisée comme telle par Lyapin [24] et Haimo [15] dans des cas particuliers. Dans des situations plus générales, elle apparaît implicitement comme conséquence de propriétés de compacité [19] ou comme opposé de la notion d'"immédiaticité" [10] .

Pour nous, l'intérêt initial est que toute extension régulière peut être exprimée par un triple de la forme (f, u, O). L'ensemble $Ext_r(C, A)$ des extensions régulières forme donc un sous-groupe de $Ext(C, A)$.
Si C est proprement filtré, toute extension par C est régulière ; la réciproque est vraie dans des cas assez généraux (2.3.). De même, nous avons étudié un critère pour que toute extension de A soit régulière (2.4.)
Par exemple, si A est linéairement compact et v(c) filtrant à gauche pour tout c dans C, alors toute extension de A par C est régulière.

$Ext(C, A)$ et $Ext_r(C, A)$ sont des foncteurs -covariants en C, contravariants en A- de $\mathcal{F}(R, I) \times \mathcal{F}(R, I)$ dans $\mathcal{F}(Z)$.
Ils possèdent les bonnes propriétés habituelles des foncteurs d'extensions ; nous n'avons démontré que leur comportement vis-à-vis des suites exactes que nous utilisons constamment dans la suite ; la démonstration quoique routinière est assez longue (3.2.)

Le chapitre 4 est réservé au foncteur Ext_o^R, simplement noté Ext_o, dont nous démontrons qu'il est le quotient d'un groupe de morphismes dans une catégorie abélienne $\mathcal{J}(R,I)$ associée à $\mathcal{B}(R,I)$.

A l'intérêt propre de l'étude de Ext_o, notamment dans des situations algébriques particulières (A injectif ou C projectif par exemple) s'ajoute un intérêt plus général lorsqu'on se limite, soit, si I est filtrant à droite, à la sous-catégorie des modules exhaustifs , soit, si I est filtrant à gauche, à la sous-catégorie des modules séparés et complets.

On peut prouver d'abord que ces deux sous-catégories peuvent être identifiées à des sous-catégories de $\mathcal{J}(R,I)$; de plus, dans les deux cas, un procédé élémentaire (3.4.) permet de ramener l'étude de Ext ou Ext_r à celle des groupes Ext_o ; enfin, chaque groupe Ext_o apparaît comme conoyau d'une application de groupes de morphismes de $\mathcal{J}(R,I)$ (4.1.)
Nous donnons en 4.2. quelques exemples de calcul explicite de Ext_o.

Les chapitres 5 et 6 sont consacrés respectivement aux extensions filtrées construites sur un complété de A et à des extensions introduites sur des modules de fractions et qui apparaissent souvent comme la réciproque du passage d'un module à sa boule unité.
On découvre facilement quand on peut affirmer que la topologie d'une filtration est une topologie de R-module. Lorsque c'est le cas et que la topologie est séparée, on peut faire du complété $\hat{A}$ de A une extension filtrée de A. Nous étendons cette construction au cas où il y a deux filtrations (la I-filtration initiale et une auxiliaire par rapport à laquelle nous formons le complété) et même à une limite projective filtrée quelconque (1.1.6.)
Nous avons étudié en détail les cas où les modules $A^i = A/A_i$ sont certaines sommes interdirectes -prolongeant ainsi une note à l'Académie(sans démonstration) [23] .

$\hat{A}$ possède alors un sous-module dense, somme interdirecte, et peut parfois lui-même être mis sous cette forme (5.2.) Ces résultats ont diverses applications parmi lesquelles nous retrouvons une part de la théorie de p-groupes de base et de la structure des groupes localement compacts (5.3.)

Lorsque R est commutatif, I commutatif unital, $w(1) = 1$ et S une partie multiplicative contenant 1 et formée d'éléments f-simplifiables (c'est-à-dire si K et K' sont des idéaux de I, $w(s)K \supset w(s)K' \Rightarrow K \supset K'$), on peut étendre la filtration d'un module S-valué A au module de fractions $S^{-1}A$.
Si $v(a) \leq w(1)$ pour tout a, cette extension est une sorte de réciproque du passage à la boule-unité, bien qu'en général $(S^{-1}A)_1 \neq A$.
Ces $(S^{-1}A)_1$ généralisent la notion de divisé de A utilisée par Lazard [21] .
Nous avons démontré une condition nécessaire et suffisante pour que A soit dense dans $(S^{-1}A)_1$, étudié le complété $\widehat{(S^{-1}A)_1}$ et les rapports entre $\mathrm{Ext}(X, A)$ et $\mathrm{Ext}(X, (S^{-1}A)_1)$

Une part des chapitres 3, 4, 5 et 6 est consacrée à différents aspects de la question "quand $\mathrm{Ext}(C, A) = 0$?" qui mérite une attention particulière en tant qu'élément essentiel du problème des décompositions en somme directe au sens de $\mathcal{M}(R, I)$

Une première étape est l'étude des modules projectifs et injectifs au sens de $\mathcal{M}(R, I)$ (3.3.)
Pour ce qui regarde les modules projectifs, nous démontrons facilement que dans les cas intéressants, il existe suffisamment de modules libres au sens de $\mathcal{M}(R, I)$ (modules filtrés-libres) pour que tout module filtré soit le quotient d'un module projectif. Le résultat est négatif pour les modules injectifs.

Si on s'attaque au problème général, on constate qu'il se décompose en un problème pratiquement algébrique : "quand toute extension est-elle construite sur la somme directe ? " et la recherche des cas d'annulation de Ext_o qui est l'objet de 4.3. (les résultats déjà cités de 3.4.) permettent des passages).

Notons parmi les résultats de 4.3. les deux suivants, où S est une partie de R :

$\mathrm{Ext}_o(C, A) = 0$ si

1. A est S-valué, C à S-torsion, et si S est formé d'éléments f-simplifiables.

ou si

2. deux éléments de S ont un multiple commun à droite et les A_i sont fermés pour la topologie S-adique.

L'extension $S^{-1}A$ du chapitre 6, et, si R est principal, le complété $\hat{A}$ pour une filtration S-adique auxiliaire sont injectifs au sens algébrique pour certaines classes importantes de R-modules et ils réalisent les conditions pour A des résultats 1 et 2 respectivement. En combinant ces remarques, on obtient une propriété d'injectivité partielle, qui compense dans une certaine mesure le résultat négatif dans le cas général.

Chacune des ces propriétés -comme aussi la présentation d'un module filtré comme quotient d'un module filtré-libre- permettent de décrire Ext(C, A) comme quotient d'un groupe de morphismes ce qui revient en fait à décrire les extensions de A par C à partir d'une extension donnée et de morphismes (3.3.8., 5.4.9., 6.2.5.)

A la fin de 4.3., nous obtenons un résultat de décomposition de vectoriels qui généralise Monna [26] . En utilisant l'étude du complété, nous obtenons un résultat comparable à celui de Serre [27] ; par passage à la boule unité, on en déduit la structure de l'extension $(S^{-1}A)_1$ du chapitre 6.

Au début du chapitre 3, nous avons esquissé quelques applications algébriques de notre théorie.
L'instrument de base est l'application qui, à une classe d'extensions filtrées, fait correspondre la classe des extensions algébriques sous-jacentes.
Cette application est un homomorphisme de groupes abéliens, en général quelconque. En choisissant convenablement les filtrations, on peut s'arranger pour qu'elle soit bijective et en même temps pour que les foncteurs "groupes de morphismes" et "groupes d'extensions" soient les mêmes ; ceci permet d'affirmer que la théorie classique des anneaux-modules, avec ces foncteurs, est un cas particulier de la nôtre.

Si A et C sont munis d'une filtration S-adique, les extensions algébriques sous-jacentes sont précisément les extensions S-pures, ce qui donne une caractérisation du groupe des extensions S-pures à partir de la théorie. L'emploi de la filtration d'ordre fournit aussi des indications. En utilisant la régularité, on obtient des critères de décomposition en somme directe.

Le chapitre 7 est tout entier consacré aux applications topologiques.
Il faut d'abord se demander quand un module topologique est filtrable, c'est-à-dire quand sa topologie est la topologie d'une filtration.
Une condition nécessaire est évidemment qu'il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé de sous-groupes et on peut prendre ce système, ordonné par inclusion, pour I. La difficulté est d'y introduire une multiplication convenable et de concilier les systèmes de R et A (c'est possible notamment si R est discret).
Ceci fait, il est facile de décrire le groupe $Ext_t(C,A)$ pour des filtrations compatibles de R, A, C et l'équivalence topologique.

En réunissant toutes les possibilités de représentation, nous obtenons un groupe, limite inductive des groupes $Ext_t(C, A)$ qui est constitué par toutes les extensions filtrables possibles de A par C.

Le reste du chapitre donne des renseignements sur ce groupe et la notion de régularité que l'on peut encore introduire dans ce cas.

Notons que le procédé que nous décrivons au chapitre 7 est de portée plus générale. Il peut, si cela se révèle utile, être appliqué à l'ensemble des sous-groupes additifs satisfaisant une propriété donnée du moment que cet ensemble est un treillis et qu'une filtration de R n'est pas imposée par le problème.

Nous avons rassemblé dans un chapitre 0 notre terminologie et quelques définitions et résultats connus que nous utiliserons par la suite. Les lecteurs à qui ce chapitre serait tout-à-fait inutile sont priés de nous en excuser.

Je voudrais que Monsieur Papy trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour l'appui précieux et les conseils éclairés qu'il a bien voulu m'accorder lors de la rédaction de cette thèse.

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans le soutien du Fonds National de la Recherche Scientifique auquel j'adresse mes remerciements sincères.

CHAPITRE 0 : PRELIMINAIRES

0.0. Notations - Conventions

Dans ce travail, anneau est mis pour anneau unital
module pour module unital à gauche
groupe pour groupe abélien

$\omega, \mathbb{Z}, Q, Z_n$ désignent respectivement les entiers naturels, les entiers rationnels, les rationnels, les groupes cycliques d'ordre n.

Si A_i est un sous-groupe additif du R-module A, nous noterons A^i le quotient A/A_i.

Les résultats élémentaires de Bourbaki [2], [3] et de Fuchs [12] sur les groupes, les modules, les modules topologiques, sont supposés connus.

0.1. Ordre

0.1.1. Un ensemble ordonné $I, \leq$, est filtrant à gauche (à droite) si pour tout $i, j \in I$, il existe un k dans I avec $k \leq i$, $k \leq j$ ($i \leq k$, $j \leq k$). Tout ensemble totalement ordonné est filtrant à gauche et à droite.
Un sup-treillis est un ordonné $I, \leq$, tel que pour tout $i, j \in I$, il existe un $k = \sup(i,j)$, $i \leq k$, $j \leq k$ et si $k' \geq i$, $k' \geq j$, alors $k' \geq k$. Définition symétrique pour inf-treillis.
Un treillis est un sup-et un inf-treillis. Il est complet si tout sous-ensemble a un inf et un sup.
Une fonction croissante de l'ordonné $I, \leq$, dans l'ordonné $J, \leq$, est une fonction h de I dans J telle que $i \leq i' \Rightarrow h(i) \leq h(i')$.

0.1.2. Un monoïde ordonné $I, \leq, .$ est un monoïde muni d'une relation d'ordre telle que $i \leq j \Rightarrow ik \leq jk$ et $ki \leq kj$ pour tout k.
Dans ce travail I a toujours un élément minimum absorbant 0 et nous notons I_0 l'ensemble $I \setminus \{0\}$.

0.1.3. Un idéal de l'ordonné I est une partie K de I telle que $k \in K$, $i \geq k$ entraîne $i \in K$.
Un idéal K est principal si $K = \emptyset$ ou $K = \{i \in I \mid i \geq i_0\}$.
Nous notons $\mathcal{J}(I)$ l'ensemble des idéaux de I. C'est un treillis complet.
Dans $\mathcal{J}(I)$, nous remplaçons pour plus de commodité $\supset$ par $\leq$, $\cap$ par sup, $\cup$ par inf.

Si K_1, $K_2 \in \mathcal{J}(I)$, nous définissons $K_1 . K_2 = \{i \in I \mid i \geqslant k_1 . k_2\}$ où $k_1 \in K_1$ et $k_2 \in K_2$.
Cette définition fait de $\mathcal{J}(I), \cdot, \leqslant$ un monoïde ordonné et $I, \cdot, \leqslant$ peut être identifié à une partie de $\mathcal{J}(I), \cdot, \leqslant$ en identifiant i à idl $\{i\}$.

0.2. Limites

0.2.1. Limite inductive (Lefschetz [22]) Soit $K, \leqslant$, un ensemble ordonné, filtrant à droite ; pour tout k donnons nous un R-module A^k et pour $k \leqslant k'$, un R-homomorphisme $p^{k,k'}$ de A^k dans $A^{k'}$.
On suppose que si $k = k'$, $p^{k,k'} = 1_{A^k}$
et si $k \leqslant k' \leqslant k''$, $p^{k',k''} \circ p^{k,k'} = p^{k,k''}$.
Nous dirons que $a^k, a^{k'}$ sont identifiés si pour un $k'' \geqslant k, k'$, $p^{k,k''}(a^k) = p^{k',k''}(a^{k'})$.
Soient a, b deux collections d'éléments identifiés (a^k); $(b^{k'})$. On définit a + b comme étant la collection des éléments identifiés à $p^{k,k''}(a^k) + p^{k',k''}(b^{k'})$ pour $k'' \geqslant k, k'$. De même pour la loi externe. L'ensemble des collections d'éléments identifiés est un R-module appelé limite inductive des A^k pour les $p^{k,k'}$: $\varinjlim A^k(p^{k,k'})$.
Si les $p^{k,k'}$ sont injectifs, $\varinjlim A^k$ est une réunion.

0.2.2. La limite inductive respecte l'exactitude : si $A^k \xrightarrow{g^k} B^k \xrightarrow{h^k} C^k$ est exacte pour tout k et que les schémas formés par les g^k, les h^k et les $p^{k,k'}$ sont commutatifs, alors la suite $\varinjlim A^k \longrightarrow \varinjlim B^k \longrightarrow \varinjlim C^k$ est exacte (Bourbaki [2]).

0.2.3. Limite projective. Soit $K, \leqslant$ un ordonné, pour tout k un A^k, pour $k \leqslant k'$ un $p^{k,k'}$ avec les mêmes conditions qu'en 0.2.1. Dans le R-module $\prod_k A^k$, distinguons le sous-module des éléments (a^k) tels que pour $k \leqslant k'$, $p^{k,k'}(a^k) = a^{k'}$. Ce sous-module est appelé la limite projective des A^k pour les $p^{k,k'}$: $\varprojlim A^k (p^{k,k'}) = A$.
Une limite projective est minimale si et seulement si la projection de A dans A^k est surjective.

0.3. Topologie

0.3.1. Soit A un groupe abélien, $A_i, i \in I$, une famille de sous-groupes de A. Les A_i définissent sur A une topologie de groupe -dite engendrée par les A_i - la moins fine des topologies pour laquelle les A_i sont ouverts. Un système fondamental de 0 est formé par les intersections finies des A_i et si les A_i forment une famille filtrante à gauche pour $\subset$, on peut prendre les A_i eux-mêmes comme système. Dans ce cas, Si B est un sous-groupe, l'adhérence de $\bar{B} = \bigcap_i (B + A_i)$

<u>0.3.2</u> Si R est un anneau topologique discret, A un R-module, A_i, $i \in I$, une famille de sous-R-modules de A, la topologie engendrée par les A_i est compatible avec la loi externe, c'est-à-dire que A est un R-module topologique. On dit alors que A est <u>linéairement topologisé</u> et que sa topologie est <u>linéaire</u>.

<u>0.3.3.</u> <u>Exemples</u> - La topologie discrète, la topologie la moins fine sont des topologies linéaires.
-Tout groupe (abélien) localement compact et totalement discontinu est linéairement topologisé [3] p.58.
-Si B est un module linéairement topologisé (discret, par exemple), alors la topologie la moins fine de A telle que des homomorphismes donnés de A dans B soient continus est linéaire.

<u>0.3.4.</u> <u>Complété</u> Soit A un groupe muni de la topologie engendrée par une famille A_i de sous-groupes, filtrante à gauche pour $\subset$. Alors le complété-séparé $\hat{A}$ de A est la limite projective des groupes A^i. La topologie naturelle de complété de $\hat{A}$ est la topologie induite par la topologie de Tychonoff de $\prod_i A^i$ dont $\hat{A}$ est un sous-groupe fermé ; cette topologie est ici engendrée par les $\hat{A}_i$, noyaux des applications canoniques de A sur A^i et si A est séparé, $\hat{A}_i$ est la fermeture de A_i dans $\hat{A}$. [3] .

<u>0.3.5.</u> Soit A un module topologique séparé. A est <u>linéairement compact</u> si toute famille de $a_k + F_k$ - F_k sous-modules fermés de A - dont les sous-familles finies ont une intersection non vide, a une intersection non vide. Un module complet, linéairement topologisé pour une famille A_k, avec les A^k artiniens, est linéairement compact ; on dit plus précisément qu'il est <u>strictement linéairement compact</u>. $\hat{A}$ est compact si et seulement si les A^k sont finis.
La compacité linéaire et la compacité linéaire stricte se transmettent aux images par un homomorphisme continu, aux sous-modules fermés, aux extensions, aux produits et aux limites projectives.
Un module séparé linéairement compact est complet pour toute topologie moins fine [30] .

0.4. La catégorie $\mathcal{M}(R)$

0.4.1. Rappelons qu'une catégorie est constituée par une collection d'objets (dont un particulier noté 0) et de morphismes (dont les identités ou isomorphismes de la catégorie).
Dans toutes les catégories que nous considérerons, les morphismes de A dans B constituent un groupe Hom (A,B) et si A,B,C sont des objets, h_1, h_2 sont des morphismes de A dans B, g_1, g_2 des morphismes de B dans C,
$(g_1 + g_2) \mathrm{O} (h_1 + h_2) = g_1 \; h_1 + g_1 \mathrm{O} h_2 + g_2 \mathrm{O} h_1 + g_2 \mathrm{O} h_2$.
Un foncteur covariant d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans une catégorie $\mathcal{P}$ associe à tout objet A de $\mathcal{A}$ un objet T(A) de $\mathcal{P}$ et à tout morphisme h de A dans B un morphisme T(h) de T(A) dans T(B), les isomorphismes de $\mathcal{A}$ étant envoyés sur des isomorphismes de $\mathcal{P}$.
Si T est contrevariant, T(h) est un morphisme de T(B) dans T(A).

0.4.2. La catégorie $\mathcal{M}(R)$, où R est un anneau, a pour objets les R-modules et pour morphismes les R-homomorphismes.
Pour pouvoir réserver les notations les plus habituelles aux cas les plus fréquents dans mon texte, nous utilisons $\dot{+}$, $\mathcal{H}$om (A,B), $\mathcal{E}$xt (A,B) pour désigner la somme directe dans $\mathcal{M}(R)$, le groupe des morphismes, le groupe des extensions (= Ext^1_R (A,B)).

0.4.3. Il est bien connu que $\mathcal{H}$om (A,B) = 0
-si A est à S-torsion et B sans S-torsion ($S \subset R$).
-si, pour R principal, A est un p-module et B un q-module, p et q premiers non associés.
-si A est divisible et B réduit.

0.4.4. Le foncteur $\mathcal{E}$xt : $\mathcal{E}$xt est un foncteur de $\mathcal{M}(R) \times \mathcal{M}(R)$ dans $\mathcal{M}(Z)$, contrevariant en la première variable, covariant en la seconde défini comme suit :
Une extension de A par C est une suite exacte
$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ parfois désignée simplement par B. Les extensions sont classées suivant la relation :
B équivalent à B' $\Leftrightarrow$ il existe un schéma commutatif

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\ & B' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

où h est un R-isomorphisme.

Toute extension B peut être décrite à partir de l'ensemble-produit C X A. On définit alors B + B' : on prend $B \dot{+} B'$, on considère le sous-module des couples ayant même c, on fait le quotient par la relation d'équivalence "avoir même somme des a".
Muni de la loi induite, l'ensemble des classes est un groupe : $\mathcal{E}$xt (C,A).

<u>0.4.5.</u> Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une extension, alors les suites
$0 \to \mathcal{H}om(X,A) \to \mathcal{H}om(X,B) \to \mathcal{H}om(X,C) \to \mathcal{E}xt(X,A) \to \mathcal{E}xt(X,B)$
$\to \mathcal{E}xt(X,C)$
et $0 \to \mathcal{H}om(C,X) \to \mathcal{H}om(B,X) \to \mathcal{H}om(A,X) \to \mathcal{E}xt(C,X) \to \mathcal{E}xt(B,X)$
$\to \mathcal{E}xt(A,X)$ sont exactes.

<u>0.4.6.</u> Un R-module P est <u>projectif</u> s'il réalise les trois conditions équivalentes suivantes :
1) $\mathcal{E}xt(P,X) = 0$ pour tout X.
2) Si $B \to C \to 0$ est exacte, $\mathcal{H}om(P,B) \to \mathcal{H}om(P,C) \to 0$ est exacte.
3) Tout homomorphisme de P dans un quotient de B peut être relevé en un homomorphisme de B.
Tout module libre est projectif ; si $R = Z$, la réciproque est vraie. Tout module est le quotient d'un module libre, donc d'un module projectif.

<u>0.4.7.</u> Pour que les derniers homomorphismes des suites exactes de 0.4.5. soient surjectifs pour tous X, A, B, C, il faut et il suffit que <u>R soit héréditaire gauche</u> c'est-à-dire que ses idéaux à gauche soient projectifs (anneaux principaux par exemple)

<u>0.4.8.</u> Un R-module D est dit <u>injectif</u> s'il réalise les trois conditions équivalentes suivantes :
1) $\mathcal{E}xt(X,D) = 0$ pour tout X.
2) Si $0 \to A \to B$ est exacte, $\mathcal{H}om(B,D) \to \mathcal{H}om(A,D) \to 0$ est exacte.
3) Tout homomorphisme d'un sous-module de B dans D peut être étendu en un homomorphisme de B dans D.
Tout module A peut être introduit dans un module injectif.
(N.B. Tous les résultats de ce paragraphe jusqu'ici sont tirés de Cartan et Eilenberg [7]).

<u>0.4.9.</u> Les notions de modules projectifs et injectifs peuvent être généralisées en se limitant à une classe P d'extensions.
Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est un élément de P, nous écrivons
$A \subset_P B$ et $B \xrightarrow{P} C$.

Nous disons que L est <u>P-projectif</u> si tout homomorphisme de L dans C est relevable en un homomorphisme de L dans B dès que
$B \xrightarrow{P} C$.
Définition duale pour les modules <u>P-injectifs</u>

<u>0.4.10.</u> <u>Exemples</u>

1) Soit R principal, S un sous-monoïde de $R \setminus \{0\}$ engendré par une famille de premiers.
On dit que A est un sous-module <u>S-pur</u> de B si pour tout $s \in S$, $sB \cap A = sA$.
Maranda [25] a déterminé les modules P-injectifs et

P-projectifs pour la classe P des suites exactes $0 \to A \to B \to C \to 0$ où A est S-pur dans B. Les modules P-injectifs qu'il appelle <u>S-algébriquement compacts</u> sont ceux de la forme $D \dotplus \prod D_p$, D divisible, D_p séparé-complet pour la topologie p-adique, p premier appartenant à S.

2) Les groupes abéliens P-injectifs pour P=classe des suites exactes $0 \to A \to B \to C \to 0$ où C est sans torsion sont les groupes de <u>cotorsion</u>. Les groupes S-algébriquement compacts sont cotorsion.

3) R = Z, S comme ci-dessus. Hilton et Yahya [17] ont étudié la P-injectivité pour P = classe des suites exactes $0 \to A \to B \to C \to 0$ où C est un S-groupe (l'ordre de tout $c \neq 0$ appartenant à C est dans S). Ils ont démontré que P-injectif = S-divisible.

4) Dans [16], sont étudiés les groupes P-injectifs pour les suites $0 \to A \to B \to C \to 0$ où A est "<u>large</u>" dans B (maximal pour la propriété $A \; (\quad nG) = 0$.
Tout groupe sans torsion réduit est P-injectif.

0.5. <u>Anneaux et modules de fractions</u> (Bourbaki [4])

<u>0.5.1.</u> Si R est un anneau commutatif, S un sous-monoïde de R, contenant 1 et formé d'éléments simplifiables, R peut être plongé dans l'anneau $S^{-1}R$ des fractions de R par rapport à S. De même, si A est un R-module sans S-torsion, A peut être plongé dans un module de fractions $S^{-1}A$ construit de la même façon et qui est un $S^{-1}R$-module.

<u>0.5.2.</u> (1) $S^{-1}A$ est S-divisible et sans S-torsion
(2) $S^{-1}A = A \otimes_R S^{-1}R$
(3) $S^{-1}R$ est plat dans $\mathcal{M}(R)$: si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte, alors,
$0 \to A \otimes_R S^{-1}R \to B \otimes_R S^{-1}R \to C \otimes_R S^{-1}R \to 0$ est exacte.
(4) $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R = S^{-1}R$.

CHAPITRE 1 LE GROUPE EXT.

Dans ce chapitre, nous définissons la catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ des R-modules I-filtrés et nous établissons la liste des propriétés particulières dont nous aurons besoin. Ensuite, nous décrivons les extensions dans $\mathcal{M}(R,I)$, nous les classons suivant une relation d'équivalence et nous démontrons que l'ensemble des classes peut être muni d'une loi de groupe.

1.1. La catégorie $\mathcal{M}(R,I)$

1.1.1. anneau filtré : Soient $I, ., \leq$ un monoïde ordonné, R un anneau. Si A est un R-module, T(A) est l'ensemble des sous-groupes additifs de A.
Nous disons qu'une fonction croissante de $I, ., \leq$ dans $T(R), \subset, i \longmapsto R_i$, est une filtration de R si elle réalise les conditions suivantes :

1) $R_0 = \{0\}$
2) $\forall i,j \in I,\ R_i.R_j \subset R_{ij}$

1.1.2. module filtré : La filtration de R étant fixée, nous dirons qu'une fonction croissante de I, dans T(A) : $i \longmapsto A_i$, est une filtration du R-module A si :
1') $A_0 = 0$
2') $\forall\, i,j \in I,\ R_i.A_j \subset A_{i.j}$

Les R-modules I-filtrés (ou simplement modules filtrés) sont les couples formés d'un R-module A et d'une filtration de A ; ce sont les objets de $\mathcal{M}(R,I)$.

1.1.3. Les fonctions w et v : A la filtration de R, on peut associer la fonction w de R dans $\mathcal{J}(I)$ (0.1.3.) :
$w(x) = \{i \in I \mid x \in R_i\}$.
De même, toute filtration de A détermine une fonction v associée à cette filtration.
Les conditions 1, 1', 2, 2' ci-dessus se traduisent respectivement par : $w(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$, $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
$w(xy) \leq w(x).w(y)$, $v(xa) \leq w(x).v(a)$.
L'exigence que les R_i ou les A_i soient des sous-groupes additifs se traduit par : $w(x-y) \leq \sup\,(w(x), w(y))$
$v(a-b) \leq \sup\,(v(a), v(b))$.

1.1.4. Somme directe dans $\mathcal{M}(R,I)$ Si A et B sont des objets de $\mathcal{M}(R,I)$, nous définissons $A \oplus B$ comme étant le R-module $A + B$ avec $(A + B)_i = A_i + B_i$.

1.1.5. Morphismes de $\mathcal{M}(R,I)$

Un morphisme h de A dans B est un R-homomorphisme A dans B tel que $h(A_i) \subset B_i$ pour tout i.
Un isomorphisme est un isomorphisme de modules qui est un morphisme et dont la réciproque est un morphisme.

a) L'ensemble des morphismes de A dans B constitue un groupe abélien Hom (A,B)

b) Le composé d'un morphisme de A dans B et d'un morphisme de B dans C est un morphisme de A dans C et si
$h_1, h_2 : A \longrightarrow B$, $g_1, g_2 : B \longrightarrow C$,
$(h_1+h_2) \circ (g_1 + g_2) = h_1 \circ g_1 + h_1 \circ g_2 + h_2 \circ g_1 + h_2 \circ g_2$
(Une catégorie avec somme directe et dont les morphismes possèdent les propriétés a et b est appelée <u>additive</u> par Yoneda [29]).

1.1.6. Limites dans $\mathcal{M}(R,I)$

Si A est la limite inductive de modules filtrés A^k pour des morphismes, nous construisons sur A une filtration en posant
$A_i = \ (a^k) \quad k,\ a^k \quad A_i^k$
Si A est limite projective des A^k pour des morphismes, on introduit dans A une filtration en posant
$A_i = \{ (a^k) \mid a^k \in A_i^k \text{ pour tout } k \}$. (0.2.)

1.1.7. Propriétés de Hom (A,B)

Hom (A,B) possède les bonnes propriétés habituelles des foncteurs "groupe de morphismes". Nous n'en donnons pas la démonstration, qui est exactement semblable au cas de $\mathcal{M}(R)$ [7]
Si h est un morphisme de X dans Y, on définit un homomorphisme de Hom (A,X) dans Hom (A,Y) en posant $h^*(m) = h \circ m$ et un homomorphisme h_* de Hom (Y,B) dans Hom (X,B) en posant $h_*(m) = m \circ h$, pour tous A,B

<u>Proposition</u>

(1) Si $A = \oplus A^k$, alors $\operatorname{Hom}(A,B) = \prod \operatorname{Hom}(A^k, B)$

(2) Si $B = \prod B^k$ et $B_i = \prod B_i^k$, alors $\operatorname{Hom}(A,B) = \prod \operatorname{Hom}(A^k,B)$

(3) Si $A = \varinjlim A^j$, $B = \varprojlim B^k$,
alors $\operatorname{Hom}(A,B) = \varprojlim \operatorname{Hom}(A^j, B^k)$

1.1.8. Topologie

Si R (A) est filtré, alors les R_i (A_i) définissent une topologie sur R (A) : la topologie engendrée par les R_i (A_i), $i \neq 0$ (0.3.1.). Lorsque nous parlerons d'une topologie sur R (A), c'est de celle-là qu'il s'agira, sauf mention expresse du contraire.

1.2. Cas particuliers

Nous généralisons ici les principales propriétés utilisées dans les cas classiques et nous introduisons quelques autres cas particuliers.

1.2.1. A sera dit *exhaustif* si $\bigcup_{i \in I_0} A_i = A$; *séparé* si $\bigcap_{i \in I_0} A_i = 0$.

1.2.2. A est dit *proprement filtré* si $v(a)$ est principal pour tout a (0.1.3.) et *filtrant* si $v(a)$ est filtrant à gauche pour tout a.
Les filtrations qui sont définies par une fonction de A dans I satisfaisant aux conditions de 1.1.3. sont propres (exemple : vectoriels normés sur un champ valué non archimédien).

1.2.3. Si $I, \leqslant$ est $\omega, \geqslant$, nous parlerons de modules *bien filtrés* ; le cas où $I, \leqslant$ est totalement ordonné sera qualifié de *totalement filtré*. Les modules séparés, exhaustifs, proprement filtrés pour $I_0, \leqslant\ = R_0^+, \leqslant$ sont les modules ultramétriques décrits par Krasner [20] .

1.2.4. Soit S une partie de R. Nous disons qu'un R-module filtré A est *S-valué* si $v(sa) = w(s).v(a)$ pour tout s dans S, a dans A. Si $S = R \setminus \{0\}$, nous disons simplement que A est *valué*.

1.2.5. Un élément s de R est *f-simplifiable* si pour $K, K' \in \mathcal{J}(I)$, $w(s).K \leqslant w(s).K'$ entraîne $K \leqslant K'$.
Si $w(s)$ est inversible, s est f-simplifiable. Tout élément f-simplifiable s est simplifiable à gauche dans R si R est s-valué.

1.2.6. Pour retrouver les bonnes propriétés du cas classique où $I, ., \leqslant$ est un groupe totalement ordonné, nous avons encore besoin des ensembles suivants :

$\mathcal{E}(R) = \{s \in R \mid \forall K, K' \in \mathcal{J}(I),\ w(s).\sup(K,K') = \sup(w(s).K, w(s)K')\}$
$\mathcal{E}(I) = \{K \in \mathcal{J}(I) \mid \forall r, r' \in R, \sup(w(r), w(r')).K = \sup(w(r).K, w(r').K)\}$
Si I est totalement ordonné, $\mathcal{E}(R) = R$ et $\mathcal{E}(I) = \mathcal{J}(I)$.
Si $w(s)$ est inversible, s appartient à $\mathcal{E}(R)$; tout inversible de $\mathcal{J}(I)$ appartient à $\mathcal{E}(I)$.
Si $I, .,$ est un groupe, $I \subset \mathcal{E}(I)$ et si $w(s) \in I$, s appartient à $\mathcal{E}(R)$.

1.2.7. Soit P une propriété. Si tous les A_i, $i \neq 0$, possèdent la propriété P, nous disons que A est *de filtration P*. Si tous les $A^i = A/A_i$, $i \neq 0$, possèdent la propriété P, nous disons que A est *résiduellement P*.

1.2.8. Filtration S-adique Soit S une partie du centre de R. Considérons sur S la relation de préordre "multiple de" et notons $\bar{S}$ l'ensemble ordonné des classes d'équivalence de S pour la relation d'équivalence "s équivalent à t si s est multiple de t et t multiple de s". Prenons $\bar{S}$, ., multiple de, pour I, ., $\leq$. Si A est un R-module, la fonction $\bar{s} \longrightarrow sA$ est une filtration : la filtration S-adique de A. Si $1 \in S$, la filtration est exhaustive. Si $S = \{s^n \mid n \in \omega\}$, cette filtration est propre si et seulement si elle est séparée (cas de la filtration p-adique des groupes).

1.2.9. Catégorie simple Soit I un ensemble ordonné auquel nous ajoutons éventuellement un maximum 1 et un minimum O. Nous faisons de I un monoïde ordonné en posant
$ij = 0$ si $i \neq 1$, $j \neq 1$, $i.1 = 1.i = i$, $1.0. = 0.1 = 0$
Nous construisons sur R une filtration en posant
$R_1 = R$, $R_i = 0$ pour $i \neq 1$.
Les modules filtrés sont les modules munis d'un système croissant de sous-modules indexés par I. Une catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ où R a la filtration et I la structure algébrique que l'on vient de décrire est dite simple.

1.2.10. L'anneau R dans une catégorie simple est S-valué pour l'ensemble S des éléments simplifiables à gauche. Pour $T \subset R$, un module est T-valué si et seulement si il est résiduellement sans T-torsion.

1.2.12. Filtration d'ordre Soit S comme dans 1.2.8. et $\bar{S}$ défini de même, mais avec la relation "divise". Dans la catégorie $(R,\bar{S})$ construite par le procédé de 1.2.9. nous appellerons filtration d'ordre pour S du R-module A la fonction $\bar{s} \longrightarrow A_s = \{a \in A \mid sa = 0\}$.

1.3. Extensions

1.3.1. Morphismes propres Un morphisme h de X dans Y est propre si pour tout i, $h(X_i) = h(X) \cap Y_i$. L'injection canonique d'un sous-module A dans B $(A_i = B_i \cap A)$ et la surjection canonique s de B sur un quotient $C(C_i = s(B_i))$ sont des morphismes propres ; réciproquement, si h est un morphisme propre de X dans Y, injectif, X est isomorphe à un sous-module de Y ; s'il est surjectif, Y est isomorphe à un quotient de X. Un morphisme quelconque est propre si et seulement si il est factorisable suivant le théorème d'homomorphisme.
Comme il existe toujours des morphismes non propres, $\mathcal{M}(R,I)$ n'est pas abélienne au sens de Yoneda [29] .

1.3.2. Définition d'une extension : une extension du module I-filtré A par le module I-filtré C est une suite $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, exacte dans $\mathcal{M}(R)$ où B est I-filtré et dont les applications sont des morphismes propres.

1.3.3. Description des extensions

Soit $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$ une extension. Nous identifions A à son image dans B et nous considérons un système de représentants normalisé de C dans B :
$c \longrightarrow b(c)$, $h(b(c)) = c$, $b(0) = 0$. La méthode de Schreier [12] permet de décrire B, comme groupe, par un système de facteurs f de C x C dans A, $f(c,c')=b(c)+b(c')-b(c+c') \in A$ avec

(1) $\forall c \in C,\ f(0,c) = f(c,0) = 0$
(2) $\forall c,\ c' \in C,\ f(c,c') = f(c',c)$
(3) $\forall c,c',\ c'' \in C,\ f(c,c'+c'') + f(c',c'') = f(c,c') + f(c+c',c'')$

De même, on peut définir la loi externe par
$u(r,c) = rb(c) - b(rc) \in A$,
en considérant $rb = rb(c) + ra = b(rc) + u(r,c) + ra$.
Les axiomes de distributivité et d'associativité mixte deviennent :

(4) $\forall r,r' \in R,\ \forall c \in C,\ u(r+r',c) = u(r,c) + u(r',c) + f(rc,r'c)$
(5) $\forall r \in R,\ \forall c,c' \in C,\ u(r,c) + u(r,c') + f(rc,rc') = rf(c,c') + u(r,c+c')$
(6) $\forall r,r' \in R,\ \forall c \in C,\ u(rr',c) = ru(r',c) + u(r,r'c)$

L'axiome $1.b = b$ correspond à : $\forall c \in C, u(1,c) = 0$ qui est une conséquence de (6) et de (1) en faisant $r=r'=1$ dans (6). la multiplication induite sur A correspond à la multiplication initiale ce qui entraîne : $\forall r \in R,\ u(r,0) = 0$ qui est une conséquence de (5) et de (1) en faisant $c = c' = 0$ dans (5). Toute extension définit donc, avec le choix des $b(c)$ un couple (f,u) satisfaisant à (1) -(6)

1.3.4. Réciproquement, un tel couple définit sur C x A une extension dont les lois sont :
(I) $(c,a) + (c',a') = (c + c',\ a + a' + f(c,c'))$
(II) $r(c,a) = (rc,\ u(r,c) + ra)$
(Si $R = Z$, toutes les valeurs de $u(n,c)$ peuvent être obtenues en fonction de f à partir de (4) et de $u(1,c) = 0$).

1.3.5. Etudions la filtration de B. Quand $b(c) + a$ appartient-il à B_i ?
Si $c \notin C_i$, il n'y a pas de a tel que $b(c) + a \in B_i$; si $c \in C_i$, il existe un a_1 tel que $b(c) + a_1 \in B_i$ et si $b(c) + a_2 \in B_i$, $a_1 - a_2 \in A_i$; réciproquement, si $a_2 \in a_1 + A_i$, $b(c) + a_2 \in B_i$. La filtration associe donc à tout $c \in C_i$ une classe latérale de A modulo A_i : nous la notons $t_i(c)$.

1.3.6. Pour que $t_i : C_i$ dans A^i définisse une filtration en posant

III $b(c) + a \in B_i \Leftrightarrow c \in C_i$ et $a \in t_i(c)$

il faut et il suffit que :

(7) B_i soit un sous-groupe additif de B :
$\forall c, c' \in C_i$, $t_i(c + c') = t_i(c) + t_i(c') + f(c,c') + A_i$.
(ce qui entraîne $t_i(0) = 0$ et $B_i \cap A = A_i$.)

(8) $R_i . B_j \subset B_{ij}$: $\forall r \in R_i$, $c \in C_j$, $rt_j(c) + u(r,c) \subset t_{ij}(rc)$.
(On peut considérer que r définit par multiplication une application de A^j dans A^{ij} et écrire alors (8) sous la forme : $rt_j(c) + u(r,c) + A_{ij} = t_{ij}(rc)$)

(9) $i \leqslant j$ entraîne $B_i \subset B_j$: pour $c \in C_i$, $t_j(c)$ doit être l'image de $t_i(c)$ par l'épimorphisme canonique de A^i sur A^j.
Nous avons démontré le

1.3.7. THEOREME

Toute extension B de A par C peut être caractérisée par un triple (f, u, t) $(t = (t_i)_{i \in I}$ satisfaisant à (1) - (9) et un tel triple définit une extension par I, II, III.

1.3.8. Classification des extensions Deux extensions B_1 et B_2 de A par C sont dites équivalentes s'il existe un schéma commutatif

$$\begin{tikzcd} & & B_1 \arrow[dd, "h"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\ & & B_2 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

où h est un isomorphisme de $\mathcal{M}(R,I)$

1.3.9. Proposition : Deux triples (f_1, u_1, t_1) et (t_2, u_2, t_2) définissent des extensions équivalentes si et seulement si il existe une fonction z de C dans A, $z(0) = 0$, telle que

$$f_1(c,c') - f_2(c,c') = z(c) + z(c') - z(c+c')$$

$$u_1(r,c) - u_2(r,c) = rz(i) - z(rc)$$

$$t_i(c) = - z(c) + A_i$$

Démonstration : Toute équivalence algébrique i définit une fonction z de C dans A avec
$h(c,a) = h(c, 0) + h(0,a) = (c, z(c)) + (0,a)$.
Si z réalise les propriétés ci-dessus, h est un isomorphisme pour $\mathcal{M}(R,I)$. Réciproquement, si h est un isomorphisme, réali--sons le changement de représentants
$b_2(c) \longrightarrow b_2(c) + z(c) = b_3(c)$ dans B_2. $(f_3,u_3,t_3)=(f_1,u_1,t_1)$ et $f_3(c,c') = f_2(c,c') + z(c) + z(c') - z(c+c'),\ldots$, d'où le résultat.

1.3.10. L'ensemble des triples qui satisfont à (1) - (9) est un groupe abélien, soit T(C,A).
L'ensemble des triples $\bar{z}$ obtenus à partir de z comme les deuxièmes membres de 1.3.9. est un sous-groupe de T(C, A).
L'ensemble des classes d'extensions peut ainsi être muni de la loi quotient. Nous l'appellerons le groupe des extensions de A par C et nous le noterons Ext (C, A).

1.3.11. Définition intrinsèque de la loi de Ext (C, A)
Soient B_1, B_2 deux extensions de A par C. Considérons successivement, avec leurs filtrations naturelles, $B_1 \oplus B_2$, le sous-module de $B_1 \oplus B_2$ formé des couples dont les composantes ont même projection sur C (produit fibré), le quotient de ce sous-module par le sous-module des couples dont la somme des composantes de A est nulle. Ce quotient est une extension de A par C et on vérifie facilement qu'elle peut être caractérisée par la somme des triples associés à B_1 et B_2.
Cette loi est la loi de Baer des groupes, étendue aux modules filtrés.

CHAPITRE 2 : TYPES PARTICULIERS D'EXTENSIONS

Dans ce chapitre, nous étudions quelques types particuliers d'extensions qui correspondent aux cas classiques ou dont la représentation suivant le théorème 1.3.7. est simplifiée.

2.1. Extensions linéaires

2.1.1. Soit D un sous-anneau de R (même neutre). Tout R-module est en même temps un D-module. Parmi les extensions du R-moduleApar le R-module C, on peut distinguer celles construites sur la somme directe $A \dotplus_D C$ dans $\mathcal{M}(D)$. Ce sont les extensions pour lesquelles il existe un système de représentants D-linéaire et nous les appellerons D-linéaires. L'ensemble de leurs classes d'équivalence sera noté $\mathrm{Ext}_0^D\ (C, A)$.

2.1.2. Lemme Pour qu'une extension soit D-linéaire, il faut et il suffit qu'elle puisse être représentée par un triple de $T\ (C, A)$ de la forme $(0, u, t)$ où $u(d,c) = 0$.
Alors u est biadditive, les t_i additives, et si D est central, u est D-bilinéaire.

Démonstration :
Si $b(c)$ est D-linéaire, $f(c,c') = b(c) + b(c') - b(c+c') = 0$; $u(d,c) = d\ b(c) - b(dc) = 0$. Si (f, u, t) satisfait à ces conditions, $b(c) = (c, 0)$ est D-linéaire. La deuxième partie du lemme résulte immédiatement de 1.3.

2.1.3. L'ensemble des triples de $T(C, A)$ qui satisfont aux conditions du lemme sera noté $T_0^D\ (C, A)$

THEOREME : $\mathrm{Ext}_0^D\ (C, A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}(C, A)$ et la suite $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(C,A) \longrightarrow T_0^D(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_0^D(C,A) \longrightarrow 0$ est exacte.

Démonstration : L"application $z \longrightarrow \bar{z}$ est définie en 1.3.10. $T_0^D\ (C, A)$ est un sous-groupe de $T(C, A)$ donc $\mathrm{Ext}_0^D\ (C, A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}\ (C, A)$. $\mathrm{Hom}_D\ (C, A)$ est exactement l'ensemble des fonctions de C dans A dont le triple correspondant à la forme 2.1.2.
L'exactitude de la suite est de vérification routinière.

2.1.4. $\mathrm{Ext}_{\alpha}^{Z.1}(C, A)$ comprend toutes les extensions construites sur la somme directe des groupes abéliens C et A. $\mathrm{Ext}_{\alpha}^{Z.1}(C, A) \supset \mathrm{Ext}_{o}^{D}(C, A)$ pour tout D.
Si A est D-injectif ou C D-projectif, $\mathrm{Ext}_o^D(C, A) = \mathrm{Ext}(C, A)$.
Si D est semi-simple, notamment si R est une algèbre sur le champ D, $\mathrm{Ext}(C,A) = \mathrm{Ext}_o^D(C,A)$ pour tous C, A.

2.1.5. Pour D = R, nous écrirons $\mathrm{Ext}_o(C,A)$ au lieu de $\mathrm{Ext}_o^R(C,A)$.
$\mathrm{Ext}_{\alpha}(C,A) \subset \mathrm{Ext}_o^D(C, A)$ pour tout D.

Toute extension de $\mathrm{Ext}_o(C, A)$ peut être représentée par un triple de $T_{\alpha}(C,A) = (0, 0, t)$ où les t_i sont des fonctions additives de C_i dans A^i satisfaisant à 1.3.6. (9) et $\forall r \in R_j,\ c \in C_i,\ rt_i(c) = t_{ji}(rc)$ (lemme 2.1.2. et 1.3.6. (8)

2.2. Extensions régulières

2.2.1. Dans le cas général, les fonctions t_i dépendent de f et de u, plus précisément de leurs classes latérales. Nous allons introduire un sous-ensemble d'extensions qui peuvent être caractérisées par un couple (f, u) et un système de t_i indépendants.

Définition Le couple (f,u) satisfaisant à 1.3.3. (1 - 6) est appelé équilibré s'il satisfait aux deux conditions

(1) $\forall c, c' \in C_i,\ f(c,c') \in A_i$
(2) $\forall r \in R_i,\ c \in C_j,\ u(r,c) \in A_{ij}$

2.2.2. Pour qu'un système de t_i satisfasse aux conditions 1.3.6. (7 - 9) relativement à un couple équilibré, il faut et il suffit que (0, 0, t) appartienne à $T_o(C,A)$ (2.1.5.)
L'ensemble des extensions qui peuvent être définies par un triple où (f, u) est équilibré est un sous-groupe $\mathrm{Ext}_e(C,A)$ de $\mathrm{Ext}(C,A)$, comprenant $\mathrm{Ext}_o(C,A)$.

2.2.3. Proposition : Pour une extension B de A par C, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) B peut être définie par un triple (f,u,0) (où (f,u) est donc équilibré)
b) un triple (f', u', t') qui caractérise B est tel que $i \notin v(c)\ t'_i(c) \neq \emptyset$.
c) tout élément c possède un antécédent b avec $v(b) = v(c)$
d) il existe un système de représentants de C dans B pour lequel $v(b) = v((c,a)) = \sup(v(c), v(a))$.

<u>Démonstration</u> : a $\Rightarrow$ b : Si (f', u', t') est équivalent à $(f, u, 0)$, il existe une fonction z de C dans A qui définit l'isomorphisme et $t'_i(c) = t_i(c) + z(c) + A_i = z(c) + A_i$ donc $z(c) \in \bigcap_{i \in v(c)} t'_i(c)$
b $\Rightarrow$ c : car si $x_c \in \bigcap_{i \in v(c)} t'_i(i)$, $v(c, x_c) = v(c)$
c $\Rightarrow$ d : prenons (c, x_c) comme nouveau système de représentants : dans ce nouveau système, $(c,a) \in B_i$ entraîne $c \in C_i \Rightarrow (c,0) \in B_i \Rightarrow (0,a) \in A_i$. La réciproque est évidente.
d $\Rightarrow$ a : si $(c,a) \in B_i \Rightarrow (c,0) \in B_i$, $0 \in t_i(c)$ et $t_i(c) = 0$. (1.3.5.)

<u>2.2.4.</u> <u>Définition des extensions régulières</u> : c'est une extension qui réalise les quatre conditions équivalentes de la proposition 2.2.3. On dit alors que A est un <u>sous-module régulier</u>, C un <u>quotient régulier</u>.
Un représentant qui satisfait à 2.2.3. c. est appelé <u>régulier</u>.

<u>2.2.5.</u> L'ensemble des extensions régulières est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}(C,A)$, inclus dans $\mathrm{Ext}_e(C,A)$ et noté <u>$\mathrm{Ext}_r(C,A)$</u>.
<u>$\mathrm{Ext}_e(C,A) = \mathrm{Ext}_r(C,A) + \mathrm{Ext}_o(C,A)$</u>

<u>2.2.6.</u> <u>Extensions prérégulières</u> : Une extension est <u>prérégulière</u> si pour $i_1 \dots i_n \in I$, l'image de $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_n}$ est $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n}$.
Toute extension totalement filtrée est prérégulière. Toute extension régulière est prérégulière. La réciproque est vraie si tout idéal de $v(C)$ est engendré par un nombre fini d'éléments, a fortiori si I est fini.

<u>2.2.7.</u> <u>Extensions totalement régulières</u> Le 0 de B est le seul antécédent régulier du 0 de C. Si, dans toute autre classe latérale, tous les éléments sont réguliers, nous dirons que l'extension est <u>totalement régulière</u>.
Pour que B soit une extension totalement régulière de A, il faut et il suffit que ou bien $B_i \supset A$ ou bien $B_i \subset A$. (si cette condition est réalisée, soit $b \notin A$: $v(a) \leq v(b)$ pour tout b et $v(b + a) = v(b)$.
Réciproquement, si A est totalement régulier et s'il existait un B_i, $B_i \cap A \neq A$ et B_i, il existerait un b dans $B_i \setminus A$ et un a dans $A \setminus B_i$ et $v(b + a) \neq v(b)$, contradiction).
En particulier, si I est totalement ordonné, tout B_i est totalement régulier dans B.

<u>2.2.8.</u> Dans un module filtré séparé, tout sous-module régulier est fermé, tout sous-module totalement régulier est ouvert.

<u>2.2.9.</u> La ~~la~~ régularité a été utilisée dans le cas particulier des filtrations S-adiques par Lyapin [24] (pour la première fois semble-t-il) et par Haimo [15]. Kaplansky l'a utilisé implicitement dans [19]. Nous parlerons plus loin (3.1.) des résultats obtenus par ces auteurs.

2.3. Régularité et filtrations propres

2.3.1. THEOREME : Un quotient d'un module proprement filtré est proprement filtré si et seulement si il est régulier.

Démonstration : CN : Si le quotient C est proprement filtré, alors pour tout $c \neq 0$, $v(c) = (i)$ ou $\emptyset$ (1.2.2.).
Si $v(c) = \emptyset$, $v(b) = \emptyset$ pour tout antécédent b de c.
Si $v(c) = (i)$, alors un des antécédents de c, soit b, appartient à B_i et b est un représentant régulier de c.
CS : Si C est un quotient régulier, pour tout $c \neq 0$, il existe un b tel que $v(b) = v(c)$. Or $v(b) = (i)$ ou $\emptyset$, d'où le résultat.

2.3.2. Proposition Si I est un sup-treillis, toute extension d'un module proprement filtré est proprement filtrée.

Démonstration : Pour un système de représentants réguliers $b(c)$, $v(b(c)) = v(c) = i_c$;
$v((b(c) + a)) = \sup(v(b(c)), v(a)) = \sup(i_c, i_a) \in I$.
(en fait, une condition nécessaire et suffisante est que le sup. de tout couple i_c, i_a, $i_c \in v(C)$, $i_a \in v(A)$ existe).

2.3.3. Lq proposition montre que si l'hypthèse est réalisée, la sous-catégorie des modules proprement filtrés de $\mathcal{A}(R,I)$ a le même foncteur Ext que $\mathcal{A}(R,I)$.
En revanche, si I n'est pas un sup-treillis, il existe pour tout anneau R une catégorie $\mathcal{A}(R,I)$ au moins -la catégorie simple- dans laquelle le foncteur Ext réduit aux modules proprement filtrés peut être vide. (Si $\sup(i, j)$ n'appartient pas à I, construisons sur un R-module A la filtration $A_k = A$, $k \geqslant i$, $A_k = 0$ ailleurs, sur un R-module C la filtration $C_k = C$, $k \geqslant j$, $C_k = 0$ ailleurs ; ce sont des modules proprement filtrés et dans toute extension, $v(c,a) \neq \emptyset$, $v(c,a) \notin I$ dès que $c \neq 0$, $a \neq 0$).

2.3.4. Proposition Si $K \in \mathcal{C}(I)$ (1.2.6.), alors la fonction v de R dans $\mathcal{T}(I)$: $r \longrightarrow w(r).K$ définit une I-filtration de R

Démonstration : Nous notons $R^{(K)}$ le R-module R auquel est associée la fonction v.
Si $r_1, r_2 \in R^{(K)}$, $v(r_1 - r_2) = w(r_1 - r_2).K$
$\leqslant \sup(w(r_1), w(r_2))K = \sup(w(r_1)K, w(r_2).K) = \sup(v(r_1), v(r_2))$
Si $r_1 \in R_1, r_2 \in R^{(K)}$, $v(r_1 r_2) = w(r_1 r_2).K \leqslant w(r_1).w(r_2).K = w(r_1).v(r_2)$
Remarquons que si $w(1)$ est neutre à gauche, alors $v(1) = K$ pour $1 \in R^{(K)}$.

2.3.5. Il est évident, après 2.3.1., que si C est proprement filtré, toute extension par C est régulière. Voici une réciproque partielle :

THEOREME : Si R est proprement filtré, $w(1)$ neutre à gauche dans I, I un sup-treillis, $I \subset \mathscr{C}(I)$, alors toute extension par C est régulière si et seulement si C est proprement filtré.

Démonstration : En vertu de 2.3.1., il suffit de trouver, si C n'est pas proprement filtré, une extension proprement filtrée de C : cette extension ne sera pas régulière.
A tout c et à tout $i \in v(c)$ associons un module $R_c^i = R(i)$ (2.3.4.) (si $v(c) = \emptyset$, on prend un R_c, avec un $R_{c,i} = 0$ pour tout i).
Prenons $L = \oplus R_c^i$. Par l'application h qui envoie 1_c^i sur c, C est une image homomorphe de L et h est un morphisme propre, donc L est une extension par C.
Enfin, chaque R_c^i est proprement filtré puisque R l'est, la $\oplus$ est proprement filtrée puisque I est un sup-treillis, ce qui termine la démonstration.

2.3.6. Si la catégorie est simple, R est toujours proprement filtré, $w(r) = 1$ pour $r \neq 0$ et $I \subset \mathscr{C}(I)$. Si I est totalement ordonné, c'est un sup-treillis et $I \subset \mathscr{C}(I)$.

2.4. Régularité et $\mathcal{F}$-compacité

2.4.1. Nous venons de démontrer un critère pour que toute extension par un module C soit régulière. On peut se demander quand toute extension de A est régulière.
Par exemple, toute extension B d'un module fini et totalement filtré est régulière car $v(c) = \min v(b_k)$, les b_k étant les antécédents, en nombre fini, de c. Nous allons démontrer une condition moins restrictive.

2.4.2. Dans un module I-filtré A soit K un idéal de I et pour tout k dans K une classe latérale $x_k + A_k$. Nous dirons que la famille des $x_k + A_k$ est centrée si toute intersection finie de classes latérales de la famille est non vide ; qu'elle a une limite si l'intersection de toutes les classes latérales est non vide. K est appelé le support de la famille.
A est dit K-compact si et seulement si toute famille centrée a une limite. Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{I}(I)$, on dit que A est $\mathcal{F}$-compact s'il est K-compact pour $K \in \mathcal{F}$.

2.4.3. Si A est compact -ou plus généralement linéairement compact (0.3.5.) pour une topologie de A dans laquelle les A_i, $i \neq 0$, sont fermés- alors A est $\mathcal{I}(I)$-compact. Si $I \in \mathcal{F}$ et si A est $\mathcal{F}$-compact, alors A est complet.

2.4.4. THEOREME : Toute extension prérégulière (2.2.6.) par C d'un module $v(C)$-compact est régulière.

Démonstration : Soit $c \neq 0$ dans C, b un antécédent de c dans une extension de A par C. Alors b définit une famille de classes latérales, de support $v(c)$, $x_k + A_k$ ($x_k \in A$) : x_k étant tel que

-

$b + x_k \in B_k$. Il est clair que les classes latérales ne dépendent que de b et que le fait d'être centrée ou d'avoir une limite ne dépend que de c.
Les familles $\{ x_k + A_k \}$ sont centrées puisque B est une extension prérégulière (si $k_1 \ldots k_n$ appartiennent à $v(c)$, il existe un $b+x$ tel que $b + x \in B_{k_1} \cap \ldots B_{k_n}$ donc $x \in x_{k_i} + A_{k_i}$). (La réciproque est vraie).
Maintenant, pour que c ait un antécédent régulier $b + a$, il faut et il suffit que $b + a$ appartienne à B_k pour tout k donc que $a - a_k \in A_k$ ou encore que a soit limite de $\{ x_k + A_k \}$.
Donc si B est prérégulier et A $v(\mathcal{C})$-compact, B est régulier.

2.4.5. Si C est filtrant, (1.2.2.), toutes les extensions par C sont prérégulières. Notons $\mathcal{L}(I)$ l'ensemble des idéaux filtrants à gauche de I.

2.4.6. THEOREME : Si $I \subset \mathscr{C}(I)$, R filtrant et $w(1)$ neutre à gauche, pour que toute extension de A par un module filtrant soit régulière, il faut (et il suffit) que A soit $\mathcal{L}(I)$-compact.

Démonstration : Si A n'est pas $\mathcal{L}(I)$-compact, il existe un idéal K filtrant et une famille centrée $\{ x_k + A_k \}$, d'intersection vide. Construisons $A' = A \dotplus R$ et

$$A'_i = \{ a + r \mid a - rx_k \in A_i \text{ et } w(r).k \leq i \}$$

Les A'_i définissent une filtration de A' qui étend la filtration de A. :
A'_i est un sous-groupe :
si $a - rx_k \in A_i$ et $w(r).k \leq i$, $a + r = a - rx_{k'} + r(1 + x_{k'})$
et si $k' \leq k$, $v(r(x_k - x_{k'})) \leq w(r).k \leq i$.
Donc si $a_1 + r_1 = a_1 - rx_{k_1} + r(1 + x_{k_1})$ est un autre élément de A'_i, il existe un $k' \leq k, k_1$ puisque K est filtrant et
$a + r - a_1 - r_1 = a - a_1 - (r - r_1) x_{k'} + (r - r_1)(1 + x_{k'}) \in A'_i$.
$v(ra') \leq w(r).v(a')$ et $i \leq j$ entraîne $A'_i \subset A'_j$ (évident)
Si $a' \in A \cap A'_i$, alors son r est nul et $a' \in A_i$.
Le quotient est filtrant : en effet, si r représente un élément du quotient, $v(r) = w(r).K$ qui est filtrant. $v(1 + A) = K$.
S'il existait un antécédent $a + 1$ régulier,
$(a - x_k) + (1 + x_k) \in A'_k$, $a - x_k \in A_k$ et a serait limite de la famille $x_k + A_k$ ce qui est exclu par hypothèse. Donc A' n'est pas une extension régulière.

2.4.7. Proposition : Dans une catégorie simple, pour que toute extension de A soit régulière, il faut que A soit $\mathcal{J}(I)$-compact

Démonstration : Elle est la même que ci-dessus mais ici $A'_i = A_i + R(1 + x_i)$. R est filtrant, $w(1)$ neutre et la filtration de K n'intervient plus dans la démonstration que A'_i est un sous-groupe, ce qui est évident ici.

2.4.8. Remarquons que même dans le cas de la proposition 2.4.7., A' est prérégulier ; en effet, soient $i_1 \ldots i_n \in I$. Si l'un des $i \notin K$, $\bigcap (A'/A)_i = (0)$. Si tous les $i \in K$, alors pour tout $r \neq 0$ la famille finie de classes latérales $rx_i + A_i$ possède une intersection : d'où la prérégularité.

2.4.9. Une conséquence de 2.4.7. et de 2.4.4. est que :

Corollaire : Dans une catégorie simple, toute extension est prérégulière si et seulement si A est $\mathcal{J}$ (I)-compact

(Si I est totalement ordonné, toute extension de A est régulière si et seulement si A est $\mathcal{J}$ (I)-compact).

2.4.10. La $\mathcal{J}$-compacité a été utilisée par Kaplansky [19] et implicitement, par Haimo [15] -qui en tire une condition nécessaire de compacité d'un groupe abélien- l'un et l'autre dans des cas particuliers du type "filtration S-adique" (1.2.8.) D'autre part, Fleischer l'a étudiée dans le cas des modules proprement et totalement filtrés en liaison avec la notion d'immédiaticité. Cette notion, issue de la théorie des champs valués, peut être décrite comme signifiant qu'aucun élément de C non nul n'a de représentant régulier. Les propositions 2.4.6. et 2.4.7. n'ont pas d'équivalent dans la théorie de Fleischer, car la notion d'immédiaticité ne s'y prête pas. [10]

2.5. Extensions S-valuées

2.5.1. Si B est S-valué (1.2.4.), tous les sous-modules de B sont S-valués. Il n'en est pas de même des quotients : ainsi un groupe abélien sans torsion est $\{p^n\}$-valué pour la filtration p-adique. Ses quotients p-groupes ne sont pas $\{p^n\}$-valués.

2.5.2. THEOREME : Si B est S-valué, pour que $B/_A$ soit S-valué il faut et il suffit que A soit résiduellement S-pur.

Démonstration CS : Il faut démontrer que $v(sc) \geqslant w(s).v(c)$ pour $c \in C = B/_A$.
$v(sc) = \bigcup_{b' \to sc} v(b')$, $v(c) = \bigcup_{b \to c} v(b)$. Si b est un antécédent de c, et $i \in v(sc)$, il existe un a avec $sb + a \in B_i$ donc a est s-divisible modulo B_i, de sorte qu'il existe un a' avec $a - sa' \in B_i$, donc
$s(b + a') \in B_i$ et $i \in w(s). \bigcup_{b'' \to c} v(b'') = w(s).v(c)$.
CN : Si A n'est pas résiduellement S-pur, il existe un a, un s, un b, uni tels que $a - sb \in B_i$ et qu'il n'existe pas de a' avec $sa' + a \in B_i$. Alors, si c est l'image de b, $v(sc) \leqslant i$, mais si $i \in w(s).v(c)$, $i \in w(s). \bigcup_{b' \to c} v(b')$. Il existe un $b' = b + a'$ tel que $sb' = sb + sa' \in B_i$ donc $a + sa' \in B_i$ contrairement à l'hypothèse.

2.5.3. Notons $X_s^i(A)$ le sous-ensemble $\{a \in A \mid w(s).v(a) \leqslant i\}$
Pour que A soit S-valué, il faut et il suffit que $X_s^i(A)$ soit précisément l'ensemble des éléments a dont l'ordre modulo A_i comprend s.

2.5.4. Lemme : Si $S \subset \mathcal{C}(R)$ (1.2.6.), $X_s^i(A)$ est un sous-groupe de A pour tout module A.

Démonstration Soient $a_1, a_2 \in X_s^i(A)$;
alors $w(s).v(a_1) \leqslant i$, $w(s).v(a_2) \leqslant i$ entraînent
$w(s).v(a_1-a_2) \leqslant w(s).\sup(v(a_1),v(a_2)) = \sup(w(s).v(a_1),w(s).v(a_2)) \leqslant i$
(le second passage par l'hypothèse, comparer avec 2.3.4.)
Remarquons que dans un module S-valué, $X_s^i(A)$ est toujours un sous-groupe.

2.5.5. THEOREME Si $S \subset \mathcal{C}(R)$, toute extension B d'un module S-valué A par un module S-valué est S-valuée

Démonstration : Il faut démontrer que $sb \in B_i$ entraîne $b \in X_s^i(B)$ (2.5.3.)
$sb \in B_i \Rightarrow sc \in C_i \Rightarrow c \in X_s^i(C)$ (puisque C est S-valué) $\Rightarrow i \in w(s)\ v(c)$
donc $i \geqslant jk$, $j \in w(s)$, $k \in v(c)$ et $k \in v(b')$, $b' = b + a$.
Alors, $w(s).v(b+a) \leqslant jk \leqslant i$ et $b + a \in X_s^i(B)$ ce qui entraîne
$sb + sa \in B_i$ donc $sa \in A_i$, $a \in X_s^i(A)$ et comme
$X_s^i(A) \subset X_s^i(B)$ et que $X_s^i(B)$ est un groupe (lemme),
$b = b + a - a \in X_s^i(B)$. CQFD.

2.5.6. Le théorème 2.5.5. montre donc que dans tous les cas intéressants, le foncteur Ext pris dans la catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ est le même que celui pris dans la sous-catégorie des modules S-valués : si I est totalement ordonné $\mathcal{C}(R) = R$ (1.2.6.); si la catégorie est simple, $w(r) = 1$ pour $r \neq 0$ donc $\mathcal{C}(R) = R$ également.

2.5.7. Remarque générale Dans 2.3. et ci-dessus, nous avons étudié les propriétés de transfert aux sous-modules, quotients et extensions, des propriétés "proprement filtré" et "S-valué". Les autres propriétés de 1.2. qui ne sont pas générales dans $\mathcal{M}(R,I)$, n'offrent aucune difficulté à cet égard. On sait que tout sous-module d'un module séparé est séparé, et qu'un quotient est séparé si et seulement si le noyau est fermé ; on vérifie immédiatement que si A et C sont séparés, leurs extensions le sont aussi. Les sous-modules et les quotients d'un module exhaustif sont exhaustifs.
D'autre part, supposons I filtrant à droite ; si A et C sont exhaustifs, soit $b \in B$; l'image c de b appartient à un C_i et $b = b(c) + a$ avec $b(c) \in B_i$; a appartient à un certain A_j donc b appartient à B_k pour $k \geqslant i, j$.

Ces remarques élémentaires permettent de démêler lee cas le plus simple, où R est un champ et I totalement ordonné, O la classe des modules filtrés qui sont proprement filtrés -valués-exhaustifs - séparés.
Si A et C $\in$ O, toute extension appartient à O (I totalement ordonné). Si B $\in$ O, un sous-module appartient à O et un quotient est valué et exhaustif. Pour qu'il appartienne à O, il faut et il suffit que le noyau soit régulier (2.3.1. et 2.2.8.)
Notons enfin que les transferts des propriété de filtration et résiduelles (1.2.7.) se déduisent immédiatement des suites exactes $0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$
et $0 \longrightarrow A^i \longrightarrow B^i \longrightarrow C^i \longrightarrow 0$.

CHAPITRE 3

PROPRIETES FONCTORIELLES DES GROUPES D'EXTENSIONS

Dans ce chapitre, nous étudions quelques propriétés des foncteurs Ext et Ext_r, successivement : rapports avec les extensions algébriques, suites exactes, injectivité et projectivité, procédés de réduction.

3.1: Rapports avec les extensions algébriques

3.1.1. Si D est un sous-anneau de R (même neutre), il existe un homomorphisme de Ext(C,A) dans $\mathrm{Ext}_D(C,A)$ (groupe des extensions algébriques de A par C, considérés comme D-modules) qui à un élément de Ext(C,A) associe la classe des extensions sous-jacentes de D-modules.
Le noyau de cette application est $\mathrm{Ext}_0^D(C,A)$. L'image est un sous-groupe de $\mathrm{Ext}_D(C,A)$: $\mathrm{Ext}_D^f(C,A)$

3.1.2. On peut évidemment procéder de même pour les seules extensions régulières (ou équilibrées). Les images de $\mathrm{Ext}_r(C,A)$ et $\mathrm{Ext}_e(C,A)$ sont égales (2.2.5.) ; nous noterons cette image $\mathrm{Ext}_D^e(C, A)$

3.1.3. En général, $\mathrm{Ext}_D^e(C,A)$, $\mathrm{Ext}_D^f(C, A)$, $\mathrm{Ext}_D(C,A)$ sont des groupes distincts comme le prouvent les exemples suivants :

$R = D = Z$, $C = Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $A = Z$. Toute extension algébrique peut être décrite par un système de facteurs où $f(\bar{1}, \bar{1}) = n$, n entier quelconque. Les deux classes d'équivalence sont formées respectivement des f avec n pair (extension nulle) et des f avec n impair.
Si $A = Z$ a la filtration 2-adique et $Z_{2,k} = Z_2$ pour un $k \geqslant 1$, $f(\bar{1},\bar{1})$ définit un élément de Ext^e si et seulement si il est inclus à 2^kZ, donc pair et $\mathrm{Ext}^e(Z_2,Z) = 0 \neq \mathrm{Ext}(Z_2,Z) \simeq Z_2$
$\mathrm{Ext}^f(Z_2, Z) = 0$ car $f(\bar{1},\bar{1}) + 2t_k(\bar{1}) - t_k(\bar{0}) = 2^kZ$, est impossible pour $f(\bar{1},\bar{1})$ impair. Donc $\mathrm{Ext}^f(Z_2, Z) \neq \mathrm{Ext}(Z_2, Z)$
Si nous prenons $Z_{2,k} = 0$ pour tout k, tout $f \in \mathrm{Ext}^e(C,A)$ et $\mathrm{Ext}^e(Z_2,Z) = \mathrm{Ext}^f(Z_2,Z) = \mathrm{Ext}(Z_2, Z)$.

Prenons maintenant la filtration 3-adique sur $A = Z$ et $Z_{2,k} = Z_2$ pour tout k.

$\mathcal{E}xt^e(C,A) = 0$ car $f(\bar{I},\bar{I}) \in 3^k Z$ pour tout k et $f = 0$. Si $f(\bar{I},\bar{I})=1$, $1 + t_k(\bar{I}) + t_k(\bar{I}) - t_k(\bar{O}) = 1 + 2\, t_k(\bar{I}) = 3^k Z$ pour tout k est toujours possible,
de sorte que $Ext^I(C,A) = \mathcal{E}xt(C,\ A) \supsetneq \mathcal{E}xt^e(C,\ A)$

3.1.4. THEOREME : La catégorie $\mathcal{M}(R)$ peut être identifiée à une sous-catégorie de la catégorie simple $\mathcal{M}(R,I)$ (pour tout I), avec $Hom = \mathcal{H}om$, $Ext = \mathcal{E}xt$.

Démonstration : A tout objet A de $\mathcal{M}(R)$ nous associons le module filtré $\bar{A} = (A,\ A_i = 0$ pour tout $i)$.
Evidemment, tout morphisme de A dans B est un morphisme de $\bar{A}$ dans $\bar{B}$, donc $Hom(\bar{A},\bar{B}) = \mathcal{H}om\ (A,B)$. D'autre part, $Ext_o(\bar{C},\bar{A}) = 0$ car $T_o(\bar{C},\bar{A}) = 0$ ($C_i = 0$ pour tout i).
$Ext^e\ (\bar{C},\bar{A}) = \mathcal{E}xt\ (C,A)$ car tout couple (f,u) est équilibré donc $\mathcal{E}xt\ (C,A) \simeq Ext(\bar{C},\bar{A})$
Ce résultat montre que la théorie des catégories $\mathcal{M}(R)$, avec les foncteurs $\mathcal{H}om$ et $\mathcal{E}xt$ est un cas particulier de l'étude réalisée dans ce travail.

3.1.5. Une autre façon d'en appliquer la théorie à l'algèbre est d'étudier les filtrations S-adiques et les filtrations d'ordre (1.2.8., 1.2.11.). Prenons S comme dans ces sections et supposons que S contient 1.
Notons $Ext^a(C,A)$ le groupe des extensions filtrées de A par C avec la filtration S-adique sur A et S ; par $Ext^o(C,A)$ le groupe des extensions de A par C avec la filtration d'ordre pour S sur A et C, par $Ext^{oo}(C,A)$ le sous-ensemble de $Ext^o(C,A)$ des extensions dont la filtration est la filtration d'ordre sur S, enfin par $\mathcal{P}ext(C,A)$ le sous-groupe des extensions algébriques S-pures de A par C.

3.1.6. THEOREME :

(1) $Ext^a(C,A) \simeq \mathcal{P}ext(C,A)$
(2) $Ext^{oo}(C,A)$ est un sous-groupe de $Ext^o(C,A)$ et $\mathcal{P}ext(C,A) \simeq Ext^{oo}(C,A)/Ext^{oo}(C,A) \cap Ext_o(C,A)$
(3) Si A est sans S-torsion, $\mathcal{P}ext(C,A) \simeq Ext^{oo}(C,A) = Ext^o(C,A)$

Démonstration : Il est évident qu'une extension B est S-pure si et seulement si sa filtration S-adique en fait une extension de A par C avec la filtration S-adique sur A et C ou si et seulement si la filtration d'ordre pour S de B en fait une extension de A par C, chacun muni de sa filtration d'ordre pour S. Dans le premier cas, pour qu'un triple (f, u, t) désigne une extension avec la filtration S-adique, il faut et il suffit que $t_s\ (sc) = u(s,\ c) + sA$; or cette relation n'est autre que la relation 1.3.6. (8) : $t_s(sc) = u(s,\ c) + st_1\ (c)$
donc toute filtration est du type S-adique et $Ext_a(C,A) = 0$. (1) en résulte.

Dans le 2ème cas, pour qu'un triple (f,u,t) désigne un élément de $\mathrm{Ext}^{oo}(C,A)$ il faut et il suffit que pour $sc = 0$, $t_{\bar{s}}(c)$ soit la classe latérale des solutions de $sa = -u(s,c)$. $\mathrm{Ext}^{oo}(C,A)$ est donc un sous-groupe et $\mathcal{P}\mathrm{ext}(C,A)$ est son image. (2)

Si A est sans S-torsion, $A_{\bar{s}} = 0$, $t_{\bar{s}}(c)$ est identifiable à un élément de A et par 1.3.6. (8) $s\, t_{\bar{s}}(c) + u(s,c) = t_{\bar{s}}(sc) = 0$, tout triple désigne un élément de $\mathrm{Ext}^{oo}(C,A)$, d'où (3).

3.1.7. L'introduction de la régularité fournit d'autres conséquences algébriques ; par exemple, on peut généraliser la propriété bien connue des groupes abéliens : si A est un sous-groupe pur de B et $B/_A$ somme directe de groupes cycliques, alors $B = A \dotplus B/_A$.

Proposition Si A et C sont deux R-modules munis de la filtration d'ordre pour S et que C est somme directe de R-modules cycliques dont l'ordre est engendré par S, alors $\mathrm{Ext}^{oo}(C,A) \cap \mathrm{Ext}_r(C,A) \subset \mathrm{Ext}_o(C,A)$

Démonstration : Il suffit de le démontrer pour C module cyclique dont l'ordre O est engendré par des éléments de S ([19] , lemme 2, p.329)
Soit c_o un générateur de C, b_o un représentant régulier de c_o.
Naturellement, $A + R\, b_o = B$.
Soit $a = rb_o \in A$.
Alors, $rc_o = 0$, $r \in O$, $r = \sum r_i s_i$, $s_i \in O \cap S$.
Par hypothèse, $s_i c_o = 0 \Rightarrow s_i b_o = 0$
donc $a = rb_o = 0$ et $A \quad Rb_o = 0$ de sorte que $B = A \dotplus C$.

3.1.8. De même, Kaplansky [19] et Lyapin [24] ont utilisé la filtration S-adique ou une filtration dérivée pour montrer que tel sous-module est sommante directe. Par exemple, le théorème 5-1 p 19 de Lyapin montre que si A est somme directe de sous-groupes de Q ou $Q/_Z$, C somme directe de sous-groupes de Q et si on munit A et C de leur filtration $Z/\{0\}$ -adique , alors $\mathrm{Ext}_r(C,A) \subset \mathrm{Ext}_o(C,A)$

3.2. Suites exactes

3.2.1. Si g est un morphisme de A dans A', h un morphisme de C' dans C, à l'extension (1) : $0 \to A \to B \to C \to 0$, de triple $(\mathfrak{f},u,t)$, on peut associer l'extension $0 \to A' \to B' \to C \to 0$ de triple $g \circ (\mathfrak{f},u,t)$ et l'extension $0 \to A \to B'' \to C' \to 0$ de triple $(f,u,t) \circ h = f(h(c'_1),h(c'_2)),\dots$ et les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Une catégorie additive qui possède cette double propriété est appelée <u>quasi-abélienne</u> par Yoneda [29] , p.522

3.2.2. Le procédé ci-dessus associe à g un homomorphisme g' de $\mathrm{Ext}(C,A)$ dans $\mathrm{Ext}(C,A')$ et à h un homomorphisme h' de $\mathrm{Ext}(C,A)$ dans $\mathrm{Ext}(C',A)$.

3.2.3. L'extension (1) étant fixée, on peut construire un homomorphisme G de $\mathrm{Hom}(X,C)$ dans $\mathrm{Ext}(X,A)$ en associant au morphisme m la classe du triple $(f,u,t) \circ m$ et un homomorphisme H de $\mathrm{Hom}(A,X)$ dans $\mathrm{Ext}(C,X)$ en associant au morphisme m' le triple $m' \circ (\mathfrak{f},u,t)$.

3.2.4. Les deux théorèmes qui suivent peuvent être démontrés à partir des résultats de [29] . Toutefois, comme cette démonstration est très longue et bâtie sur des arguments homologiques, nous avons préféré une démonstration directe. Nous noterons parfois t le triple (f,u,t) ; $\tilde{\bar{x}}$ sera le couple (f,u) du triple $\bar{x}$ (1.3.10.)

<u>3.2.5. THEOREME : Si $0 \to A \xrightarrow{g_1 = I_A} B \xrightarrow{g_2} C \to 0$ est une extension alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow{g^*_1} \mathrm{Hom}(X,B) \xrightarrow{g^*_2} \mathrm{Hom}(X,C) \xrightarrow{G} \mathrm{Ext}(X,A) \xrightarrow{g'_1} \mathrm{Ext}(X,B) \xrightarrow{g'_2} \mathrm{Ext}(X,C)$ est exacte pour tout X.</u>

<u>Démonstration</u> Nous caractérisons l'extension par un système de représentants $b_o(c)$ et un triple $(f_o, u_o, \mathfrak{f}_o)$, $t_{oi}(c) = a_{oi}(c) + A_i$ avec $b_o(c) + a_{oi}(c) \in B_i$.
L'exactitude en $\mathrm{Hom}(X,A)$ et $\mathrm{Hom}(X,B)$ est évidente (pour g^*_1 et g^*_2, voir 1.1.7.)
<u>En $\mathrm{Hom}(X,C)$:</u> <u>$\mathrm{im}\, g^*_2 \subset \ker G$:</u>

si $m = g_2 \circ m'$, $m' \in \mathrm{Hom}(X,B)$, $a(x) = b_o(g_2 \circ m'(x)) - m'(x)$

$G(m) = t = t_o \circ (g_2 \circ m') = b_o(g_2 \circ m') = \tilde{m}' + \tilde{a} = \tilde{a}$ et $t_i(x) = -a(x) + A_i$
car $x \in X_i$ et $b_o(g_2 \circ m'(x)) = m'(x) + a(x)$ entraîne
$m'(x) + a(x) + a_{oi}(g_2 \circ m'(x)) \in B_i$ et $a(x) \in -a_{oi}(g_2 \circ m'(x)) + A_i$.

ker $G \subset$ im g^*_2 : prenons $m \in \mathrm{Hom}(X,C)$ et $t_o \circ m = \bar{a}$.
Posons $m'(x) = b_o(mx) - a(x)$. $(g_2 \circ m'(x) = m(x))$.
m' est un morphisme car $m'(x+y) = b_o(mx) + b_o(my) - f_o(mx,my)$
$-a(x) - a(y) + f_o(mx,my) = m'(x) + m'(y)$;
idem pour u et si $x \in X_i$, $b_o(mx) - a(x)$ appartient à B_i.

En Ext(X,A) : im $G \subset$ ker g'_1 :
Soit $t = t_o \circ m$, $(t_o, u_o) \circ m = \widetilde{b_o \circ m}$ et $t_{oi}(mx) + b_o(mx) \subset B_i$

ker $g'_1 \subset$ im G : Soit $(f,u,t) = \bar{b} \in A$. Posons $m(x) = b(x)+A$;
c'est un morphisme.
$(f_o, u_o) \circ m = \widetilde{b_o \circ m} = (f,u) + \tilde{a}$ $(b_o(mx) = b(x)+a(x))$
et $t_{oi}(m(x)) + b_o(mx) \in B_i$ entraîne $t_{oi}(mx) + b(x) + a(x) \in B_i$
donc $t_{oi}(mx) - t_i(x) = -a(x) + A_i$ et $G(m)$ est bien la classe de t.

En Ext(X,B) : im $g'_1 \subset$ ker g'_2 est évident

ker $g'_2 \subset$ im g'_1 : si $g_2(t) = \bar{c}$, pour $b(x)$, $g_2(b(x)) = c(x)$
le triple $t - \bar{b}$ équivaut à t, son image est $(0,0,0)$ donc
il définit un élément de im g'_1.

3.2.6. THEOREME : Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h_1 = 1_A} B \xrightarrow{h_2} C \longrightarrow 0$ est une extension
alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}(C,X) \xrightarrow{h_{1*}} \mathrm{Hom}(B,X) \xrightarrow{h_{2*}} \mathrm{Hom}(A,X) \xrightarrow{H} \mathrm{Ext}(C,X)$
$\xrightarrow{h'_1} \mathrm{Ext}(B,X) \xrightarrow{h'_2} \mathrm{Ext}(A,X)$ est exacte pour tout X.

Démonstration : Nous caractérisons l'extension comme ci-dessus.
L'exactitude en Hom(C,X) et Hom(B,X) est évidente (pour h_{1*} et
h_{2*}, voir 1.1.7.)

En Hom(A,X) : im $h_{2*} \subset$ ker H : Soit m un morphisme de A dans X,
restriction d'un morphisme m' de B dans X. H(m) est la classe
de $m \circ t_o$. $m_o(t_o, u_o) = m' \circ b_o$ et $t_{oi}(c) + b_o(c) \subset B_i$ entraîne
$m't_{oi}(c) + m'(b_o(c)) \subset X_i$ de sorte que $H(m) = 0$.

ker $H \subset$ im h_{2*} : soit m dans Hom(X,A), tel que $m \circ t_o = \bar{x}$.
L'application de B dans X
$m'(b) = m'(b_o(h_2(b) + a) = x(h_2(b)) + m(a)$ est un morphisme
prolongeant m.

en Ext (C,X) : im $H \subset$ ker h'_1 : si $m \in \mathrm{Hom}(A,X)$ et $t = m \circ t_o$,
posons $x(b) = m(b_o(h_2 b) - b)$
$(f,u) = m[(t_o, u_o)(h_2,)] = m \circ (\widetilde{b_o(h_2)}) = \tilde{x}$
et $b \in B_i \Rightarrow t_{oi}(h_2 b) + b_o(h_2 b) \subset B_i$
ainsi que $t_{oi}(h_2 b) + b_o(h_2 b) - b$, donc $mt_{oi}(h_2 b) + m(b_o(h_2 b) - b)) \subset X_i$
et $t_i(b) + x(b) \subset X_i$ de sorte que (f,u,t) appartient à la
classe nulle

<u>ker $h'_1 \subset$ im H</u> : soit t un triple dont l'image $t' = \bar{x}$ $(x : B \to X)$; <u>$m(a) = -x(a)$</u> est un morphisme de A dans X.
Puisque $x(b_o(h_2 b) - b) = x(b_o(h_2 b)) - x(b)$,

$$f(c_1,c_2) - m\, f_o(c_1,c_2) = f'(b_o(c_1), b_o(c_2)) - m(b_o(c_1) + \ldots$$
$$= x(b_o(c_1)) + x(b_o(c_2)) - x(b_o(c_1) + b_o(c_2)) + x(b_o(c_1) + b_o(c_2)) - x(b_o(c_1 + c_2))$$

et $x(b_o(c))$ ne dépend que de c. De même pour u.
Si $c \in C_i$,
$t_i(c) - m t_{oi}(c) = -x(b) + X_i + x(a_{oi}(c)) + X_i = -x(b_o(c) + X_i$
$(b = b_o(c) + a_{oi}(c) \in B_i)$

<u>En Ext(B,X) : im $h'_1 \subset$ ker h'_2</u> est évident

<u>ker $h'_1 \subset$ im h'_1</u> : si t est un triple de Ext(B,X) dont la restriction à A est $\bar{x}$, posons $x(b) = x(a)$.
si $b = a \in A$ et 0 ailleurs, $t_1 = t - \bar{x}$ équivaut à t et est nul sur A, de sorte que l'on peut prendre A pour son propre système de représentants. Pour un nouveau système

$$e_2(b) = e_2(b_o(h_2(b) + a) = e_1(b_o(h_2(b)) + a$$

où e_1 correspond à t_1,

$f_2(b_1,b_2) = f_1(b_o(hb_1), b_o(hb_2))$, $u_2(rb) = u_1(r, b_o(h_2 b))$.

t_{2i} ne dépend que de la classe de b, car si $b_1 - b_2 \in A$
$b_1 = b_o(h_2 b_1) + a_1$, $b_2 = b_o(h_2 b_2) + a_2$,
alors de $e_2(b_1) + x_i(b_1) \in E_i$ (E extension de B considérée) et $e_2(b_2) + x_i(b_2) \in E_i$ résulte que
$a_1 - a_2 + x_i(b_1) - x_i(b_2) \in E_i$ ce qui entraîne (par l'hypthèse faite sur les représentants de A) que $x_i(b_1) - x_i(b_2) \in X_i$.
Maintenant, la classe de $t' = t_2\,(b_o.)$ a pour image la classe de t. CQFD.

<u>3.2.7. Corollaire du théorème 3.2.5.</u>

(1) <u>Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une extension régulière, alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,B) \to \mathrm{Hom}(X,C) \to \mathrm{Ext}_r(X,A)$ $\to \mathrm{Ext}_r(X,B) \to \mathrm{Ext}_r(X,C)$ est exacte.</u>

<u>(2) si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une extension sur $A \dotplus_o C$ alors la suite $0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,B) \to \mathrm{Hom}(X,C) \to \mathrm{Ext}^D_o(X,A)$ $\to \mathrm{Ext}^D_o(X,B) \to \mathrm{Ext}^D_o(X,C)$ est exacte.</u>

<u>Démonstration</u> (1) On part d'un triple initial $(f_o, u_o, 0)$.
<u>L'image de G</u> est incluse dans $\mathrm{Ext}_r(X,A)$ tandis que g'_1 et g'_2 font correspondre à une extension régulière une extension régulière. L'exactitude partout sauf en $\mathrm{Ext}_r(X,B)$ en résulte, ainsi que im $g'_1 \subset$ ker g'_2.
Pour démontrer que ker $g'_2 \subset$ im g'_1, on recommence le raisonnement du théorème en prenant $b(x)$ tel que $b(X_i) \subset B_i$ ce qui est possible puisque B est régulier.

(2) Même raisonnement en prenant un triple initial $(0, u_o, t_o)$ (2.1.2.) ; $c(x)$ est D-linéaire et peut être relevé en une fonction D-linéaire $b(x)$.

3.2.8. Corollaire au théorème 3.2.6. Avec les mêmes hypothèses qu'en 3.2.7., les suites $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_r(C,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_r(B,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_r(A,X)$ et $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_o^D(C,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_o^D(B,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_o^D(A,X)$ sont respectivement exactes.

Démonstration : Il suffit encore de démontrer l'exactitude en $\mathrm{Ext}_r(B,X)$ $(\mathrm{Ext}_o^D(B,X))$
(1) Si $(f,u,0) \in \ker h'_2$, (f_1,u_1,t_1) a aussi sa troisième composante nulle et les $b_o(c)$ étant réguliers, $t_{2i}=0$, donc t'_i
(2) x est une fonction D-linéaire ; en prenant les éléments de C comme leurs propres représentants t_1 et t_2 ont la forme prescrite et donc aussi t'.

3.2.9. Remarques 1 : Même si R est héréditaire gauche (0.4.7.) l'application de $\mathrm{Ext}(X,B)$ dans $\mathrm{Ext}(X,C)$ ou celle de $\mathrm{Ext}(B,X)$ dans $\mathrm{Ext}(A,X)$ ne sont pas nécessairement subjectives.
Plaçons-nous par exemple dans la catégorie simple $\mathcal{A}(Z,I)$ où $I = \{0,i,j,1\}$ avec $0 < i,j < 1$, i et j incomparables.
Prenons $X = X_1 = X_i = X_j = Z_n$, $B = Q$, $C = Q/Z$, $B_i = B_j = 0$, $C_i = C_j = 0$, $B_1 = Q$, $C_1 = Q/Z$, $\mathrm{Ext}_o(Z_n, Q) = 0$; en revanche, $\mathrm{Ext}_o(Z_n, Q/Z) \neq 0$ (deux homomorphismes distincts de Z_n dans Q/Z définissent une extension non régulière donc $\neq 0$).

Dans l'autre cas, prenons $A = 2Z = A_i = A_j = A_1$, $B = Z$, $B_1 = B_i = B_j = Z$, $X = Z = X_1$, $X_i = X_j = 0$.
On obtient une extension, non régulière donc non nulle, de X par A par t_i : injection canonique de 2Z dans Z, et t_j injection envoyant 2 sur 3 dans Z. S'il existait une extension dans $\mathrm{Ext}(Z,Z) = \mathrm{Ext}_o(Z,Z)$ dont l'image soit l'extension donnée, elle serait caractérisée par deux homomorphismes de Z dans Z $t'_i : 1 \longrightarrow n$, $t'_j : 1 \longrightarrow m$. Leurs restrictions à 2Z ne pourraient différer de t_i et t_j que par une fonction z, donc $z(2) = t_i(2) - t'_i(2) = 2 - 2n$, $z(2) = t_j(2) - t'_j(2) = 3-2m$ ce qui est impossible.

3.2.10. Remarque 2 : A côté de celles qui viennent d'être établies le foncteur Ext possède d'autres propriétés que nous n'utiliserons pas plus loin et qui correspondent aux propriétés classiques, notamment quant aux sommes et produits directs.

3.3. Injectivité et projectivité

3.3.1. Proposition (1) Tout module injectif au sens de $\mathcal{M}(R,I)$ est injectif au sens de $\mathcal{M}(R)$.
(2) Tout module projectif au sens de $\mathcal{M}(R,I)$ est projectif au sens de $\mathcal{M}(R)$.

Démonstration : Si A n'est pas injectif au sens de $\mathcal{M}(R)$, il existe $0 \to X \to Y$ exacte et un homomorphisme m de X dans A non prolongeable. Posons $Y_i = X_i = 0$ pour tout i, alorsm est un morphisme non prolongeable de X dans A et A n'est pas injectif au sens de $\mathcal{M}(R,I)$. Démonstration symétrique pour (2)

3.3.2. Lemme : Dans la catégorie $M = \mathcal{M}(Z,I)$ simple où $I_o = \{1\}$, un groupe A est injectif si et seulement si A et A_1 sont divisibles.

Démonstration : A doit être divisible (3.3.1.(1)). Il faut de plus que A_1 soit sommante directe de A. Autrement prenons $C = C_1 = A^1$. L'application de $\mathcal{H}om(C,A) = \mathcal{H}om(A^1,A)$ dans $\mathcal{H}om(A^1, A^1) = T_o(C,A)$ n'est pas surjective puisque l'application identique n'est pas relevable.
Si A et A_1 sont divisibles, tout homomorphisme de X_1 dans A^1 est relevable en un homomorphisme de X dans A, donc $Ext(X,A) = Ext_o(X,A) = 0$.

3.3.3. Proposition : Il existe des catégories $\mathcal{M}(R,I)$ dans lesquelles certains modules filtrés ne peuvent être plongés dans un module injectif.

Démonstration : Dans M prenons $X = Z$, $X_1 = 2Z$.
Si Z est inclus dans un groupe divisible A, A_1 devrait être un groupe divisible contenant 2Z donc Z,
et $A_1 \cap X = Z \neq X_1$ de sorte que A n'est pas une extension de X.

La solution du problème classique est donc négative en général.

3.3.4. En revanche, nous obtenons des résultats plus positifs pour les modules projectifs.
A côté des modules projectifs au sens de $\mathcal{M}(R,I)$, nous définissons les modules r-projectifs $(Ext_r(P,X) = 0)$.
Cela revient à dire que tout morphisme de P dans un quotient régulier de B peut être relevé en un morphisme de P dans B.

3.3.5. Proposition (1) Si $i \in \mathcal{E}(I)$ et si a) $w(I)$ est neutre) gauche dans $\mathcal{J}(I)$ ou b) $w(1)$est neutre à droite dans $w(R)$ et appartient à I, alors $R^{(1)}$(2.3.4) est projectif

(2) Si $K \in \mathcal{E}(I)$ et si a) $w(1)$ est neutre à gauche dans $\mathcal{J}(I)$ ou b) $w(1)$ est neutre à droite dans $w(R)$, alors $R^{(K)}$ est r-projectif

Démonstration : (1) Avec $i \in \mathcal{E}(I)$, $R^{(i)}$ est un module filtré (2.3.4.). Si h est un morphisme dans un quotient C de B, $v(h(1)) \leqslant w(1).i$ qui appartient de toute façon à I. Donc h(1) possède un antécédent b avec $v(b) \leqslant w(1).i$
L'homomorphisme g qui envoie 1 sur b est un morphisme relevant h car :
$v(g(r))=v(rb) \leqslant w(r).v(b) \leqslant w(r).w(1).i = w(r).i = v(r)$

(2) De même, $R^{(K)}$est un module filtré. Si C est un quotient régulier, h(1) a un antécédent b régulier, $v(b)= v(h(1)) \leqslant w(1)K$ et l'application $g : 1 \to b$ est un morphisme qui relève h.
Si R est valué, w(1) est neutre dans w(R)

3.3.6. Comme dans $\mathcal{M}(R)$, on démontre que $\oplus P_k$ est projectif (r-projectif)$\Leftrightarrow$ chaque P_k est projectif (r-projectif)
Définition : Un module $\oplus R^{(i)}$($\oplus R^{(K)}$) est appelé filtré-libre (filtré-libre régulier).

3.3.7. THEOREME Si w(1) est neutre à gauche
(1) Tout module filtré C dont $\{i \in v(c), c \neq 0\} \subset \mathcal{E}(I)$ est le quotient d'un module projectif.
(2) Tout module filtré C dont $v(C) \subset \mathcal{E}(I)$ est le quotient régulier d'un module r-projectif.

Démonstration : Dans le premier cas nous construisons un L par la méthode de 2.3.5. C'est une extension de C, projective par le lemme et 3.3.6. Dans le cas régulier, construisons $L_r = \underset{c \in C}{\oplus} R^{(v(c))}$. C'est une extension de C et elle possède un système de représentants réguliers $1^{(v(c))}$. Elle est projective par le lemme 3.3.5.(2) et 3.3.6.

3.3.8. Nous gardons les hypothèses du théorème -respectivement dans les cas 1 et 2- et nous notons $N(C)(N_r(C))$ le noyau de l'application de L sur C (L_r sur C)

Corollaire : $\mathrm{Ext}(C,X) \simeq \mathrm{Hom}(N(C),X)/\mathrm{im.Hom}(L(C),X)$.
$\mathrm{Ext}_r(C,X) \simeq \mathrm{Hom}(N_r(C),X)/\mathrm{im.Hom}(L_r(C),X)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème et du théorème 3.2.6.

- 3.3.9. Corollaire
$\mathcal{E}xt^1(C,X) \simeq Hom(N(C),X)/im(\mathcal{H}om(L(C),X) \cap Hom(N(C),X)$
$\mathcal{E}xt^e(C,X) \simeq Hom(N_r(C),X)/im(\mathcal{H}om(L_r(C),X) \cap Hom(N(C),X)$

Démonstration Il existe un épimorphisme de Hom(N(C),X) sur $\mathcal{E}xt^1(C,X)$ composé de l'épimorphisme du corollaire 3.3.8. et de l'épimorphisme de Ext(C,X) sur $\mathcal{E}xt^1(C,X)$ Il peut être considéré comme la restriction de l'application de $\mathcal{H}om(N(C),X)$ sur $\mathcal{E}xt(C,X)$ (L(C) libre) ce qui fournit le noyau. Même chose dans le cas régulier.

3.3.10. Si I est totalement ordonné et w(1) neutre à gauche, les hypothèses du théorème 3.3.7. sont satisfaites. Notons qu'alors un module est projectif si et seulement si il est sommante directe d'un module filtré-libre.

3.4. Procédés de réduction

Par ces procédés élémentaires, nous obtenons des simplifications notables dans la recherche de Ext et spécialement, deux procédés pour ramener l'étude de Ext à celle de Ext_0.

3.4.1. Si A est filtré, et B un sous-module de A, on fait de B un module filtré en posant $B_i = A_i$ pour tout i. B est une extension totalement régulière de A et si $C = B/_A$, $C_i = 0$. Un exemple naturel est, si I est filtrant à droite, le cas où B = X, $A = \bigcup_{i \in I} X_i$.

3.4.2. Si C est filtré et B un module dont C est le quotient par l'homomorphisme h de noyau A, B est filtré en posant $B_i = h^{-1}(C_i)$. B est une extension totalement régulière par C et $A = A_i$ pour tout i.
Exemple : B = X, module filtré quelconque et $X/\bigcap_{i\in I} X_i = C$ (Cséparé-associé de B).
Les propositions qui suivent permettent, dans une certaine mesure de se limiter aux modules séparés et exhaustifs quant à l'étude de Ext.

3.4.3. Proposition : Si I est filtrant à droite, X exhaustif B une extension de A par le procédé 3.4.1., alors $Ext(X,B) \simeq Ext(X,A)$ et $Ext_r(X,B) \simeq Ext_r(X,A)$

Démonstration : En vertu du théorème 3.2.5., il suffit de démontrer que Hom(X,C) = Ext(X,C) = 0.
$C_i = 0$ pour tout i et tout x appartient à un X_i donc Hom(X,C)=0
Puisque $C_i = 0$, les t_i sont des fonctions de X_i dans C.
Comme I est filtrant à droite, pour $x \in X_i \cap X_j$, $t_i(x) = t_j(x) = t(x)$. t est défini pour tout x par l'exhaustivité.

Alors les formules de 1.3. montrent que tout triple de $T(X,C)$ est de la forme $(f,u,t) = \bar{t}$ donc équivalent à $(0,0,0)$ et $Ext(X,C) = 0$.
A fortiori, $Ext_r(X,C) = 0$. Comme B est une extension totalement régulière de A, on peut appliquer le corollaire 3.2.7.(1) et $Ext_r(X,B) \simeq Ext_r(X,A)$.

3.4.4. Proposition : Si I est filtrant à gauche, X séparé-complet, B une extension par C par le procédé 3.4.2. alors $Ext(B,X) \simeq Ext(C,X)$ et $Ext_r(B,X) \simeq Ext_r(C,X)$.

Démonstration: Nous utilisons cette fois le théorème 3.2.6. $Hom(A,X) = 0$ car si h est un morphisme $h(a) \in \bigcap_i X_i = 0$ puisque $A = A_i$ pour tout i.
De même les t_i forment un système projectif d'applications de A dans X^i. Les t_i définissent ainsi une fonction t de A dans $X = \lim X^i$: $t(x)$ projeté modulo X_i sur $t_i(x)$.
Les formules de 1.3. montrent que toute extension est finalement caractérisée par $(f,u,t) = \bar{t}$, équivalent à 0 donc $Ext(A,X) = 0$.
$Ext_r(A,X) = 0$ et puisque B est totalement régulière, le corollaire 3.2.8.(1) montre que $Ext_r(X,B) \simeq Ext_r(X,A)$

3.4.5. Corollaire :

(1) Si I est filtrant à droite, et X exhaustif, alors il existe une extension B de tout A telle que $Ext(X,A) \simeq Ext_o(X,B)$.
(2) Si I est filtrant à gauche, et X séparé et complet, il existe une extension B par tout C telle que $Ext(C,X) \simeq Ext_o(B,X)$

Il suffit d'appliquer 3.4.3. et 3.4.4. à un surmodule injectif B de A (respectivement, à un module projectif dont C est le quotient).

3.4.6. Proposition Si R est héréditaire gauche (0.4.7.) et si B est une extension de A du type 3.4.1., alors la suite $\mathcal{E}xt(C,X) \to Ext_r(B,X) \to Ext_r(A,X) \to 0$ est exacte

Démonstration L'exactitude en $Ext_r(B,X)$ résulte du corollaire 3.2.8. et de $Ext_r(C,X) = \mathcal{E}xt(C,X)$ (puisque $C_i = 0$, tout couple est équilibré et $\mathcal{E}xt^e(C,X) = \mathcal{E}xt(C,X)$ tandis que $\mathcal{H}om_Z(C_i,X^i) = 0$ donc $Ext_o(C,X) = 0$).

L'application de $\mathrm{Ext}_r(B,X)$ dans $\mathrm{Ext}_r(A,X)$ est surjective car si E est une extension régulière de X par A, de triple $(f,u,0)$, l'extension algébrique sous-jacente à un antécédent E' dans $\mathcal{E}xt(B,X)$ puisque R est héréditaire gauche.
Si(f_1,u_1) caractérise E', la restriction de (f_1,u_1) à A est équivalente algébriquement à (f,u): $(f,u)-(\bar{f}_1,\bar{u}_1) = \tilde{x}$.
Posons $X(b) = x(b)$ si $b \in A$, 0 ailleurs.
$(f',u') = (f_1,u_1) - \tilde{X}$ est équivalent à (f_1,u_1) et son image est (f,u). (f',u') est équilibré puisque (f,u) l'est et que $B_i = A_i$ donc $(f',u',0)$ définit une extension dont E est l'image.

<u>3.4.7. Proposition</u> <u>Si R est héréditaire gauche et si B est une extension par C du type 3.4.2. alors la suite $\mathcal{E}xt(X,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_r(X,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_r(X,C) \longrightarrow 0$ est exacte.</u>

<u>Démonstration</u> On utilise cette fois le corollaire 3.2.7.
$\mathrm{Ext}_r(X,A) = \mathcal{E}xt(X,A)$ car puisque $A_i = A$, tout couple (f,u) est équilibré et $\mathcal{E}xt^e(X,A) = \mathcal{E}xt(X,A)$; de plus $A^1 = 0$ et $T_0(X,A) = 0$.
L'application de $\mathrm{Ext}_r(X,B)$ dans $\mathrm{Ext}_r(X,C)$ est surjective. En effet, pour une extension E de triple $(f,u,0)$, on peut construire un antécédent algébrique de couple (f',u') dont l'image est (f,u). (f',u') est équilibré : si $f(x,y)$, par exemple est $\neq 0$, son antécédent $f'(x,y)$ a même filtration (B totalement régulier) donc il est aussi équilibré pour ce qui regarde (x,y). Si $f(x,y) = 0$, $f'(x,y) \in A$ donc à tout B_i et f' est aussi équilibré en (x,y). Il en résulte que E a un antécédent régulier de triple $(f',u',0)$.

CHAPITRE 4 LE GROUPE $\mathrm{Ext}_o(C,A)$

Nous ramenons d'abord dans une certaine mesure l'étude de Ext_o^D à celle de Ext_α. Nous étudions Ext_o par rapport à une catégorie abélienne auxiliaire $\mathcal{T}(R,I)$.
Nous calculons à titre d'exemple quelques groupes Ext_o. Enfin nous nous attachons au problème important "quand Ext_o est-il nul ?".

4.1. La catégorie $\mathcal{T}(R,I)$

4.1.1.

Si D est un sous-anneau de R (2.1), les groupes Ext_o^D et T_o^D sont liés par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_D(C,A)/\mathrm{Hom}_R(C,A) \longrightarrow T_o^D(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_o^D(C,A) \longrightarrow 0 \qquad (2.1.3.)$$

On en tire immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathrm{Ext}_\alpha^D(C,A) = 0$ ou $= T_o^D(C,A)$

4.1.2.

Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ est une extension,
les suites $0 \longrightarrow T_\alpha^D(X,A) \longrightarrow T_\alpha^D(X,B) \longrightarrow T_o^D(X,C)$
et $0 \longrightarrow T_\alpha^D(C,X) \longrightarrow T_\alpha^D(B,X) \longrightarrow T_o^D(A,X)$ sont exactes.

4.1.3.

Si $T_{o(D)}(C,A)$ est le groupe $T_\alpha(C,A)$ dans $\mathcal{A}(D,I)$, on a la suite exacte $0 \longrightarrow U_o^D(C,A) \longrightarrow T_o^D(C,A) \longrightarrow T_{o(D)}(C,A)$ où $U_o^D(C,A)$ est le groupe des triples de la forme $(0,u,0)$ appartenant à $T_\alpha^D(C,A)$ tels que $v(u(r,c)) \leqslant w(r).v(c)$.
En passant aux classes d'équivalence, on obtient encore la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bar{U}_\alpha^D(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_\alpha^D(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{o(D)}(C,A)$$

$\bar{U}_o^D(C,A)$ est formé d'extensions régulières. On peut noter que

$$U_\alpha^D(C,A) \subset \mathcal{H}om_Z(R, \mathcal{H}om_D(C,A)) \quad \text{et}$$
$$\subset \mathcal{H}om_Z(C, \mathcal{H}om_D(R,A)$$

Plongements dans une catégorie abélienne

4.1.4.

A la catégorie $\mathcal{M}(R,I)$, nous associons la catégorie $\mathcal{G}(R,I)$ dont les objets sont les familles de groupes abéliens X_i, $i \in I$ avec pour $i \leq j$ un homomorphisme h^{ij} de X_i dans X_j, des lois externes de $R_i \times X_j$ dans X_{ij} qui commutent avec les h^{ij}, satisfont à la double distributivité, à l'associativité mixte et telle que si $1 \in R_n$ avec $ni = i$, $1.x_i = x_i$.
Les morphismes de cette catégorie sont les familles t_i, $i \in I$, d'homomorphismes de X_i dans Y_i qui commutent avec les h^{ij} et les lois externes.

4.1.5.

La catégorie $\mathcal{G}(R,I)$ est abélienne (1.3.1.), c'est-à-dire que tous les morphismes sont propres.
Si t_i, $i \in I$, est un morphisme de (X_i) dans (Y_i), $(X_i/\ker t_i)$ est isomorphe, au sens de la catégorie, à $(t_i(X_i))$.

4.1.6.

$\mathcal{M}(R)$ peut être identifiée à une sous-catégorie de $\mathcal{G}(R,I)$ en identifiant le R-module A à
(A): $(A)_i = A$, $h^{ij} = 1_A$ et si $r \in R_j$, $a \in (A)_i$, alors $r.a = ra \in (A)_{ji}$

$$\mathcal{H}om(A,B) \simeq \mathrm{Hom}((A),(B)).$$

4.1.7. Le foncteur _

Si A est filtré, $A \longrightarrow \underline{A} = (\underline{A}_i = A_i,\ h^{ij} =$ injections canoniques, les lois externes étant induites par la loi scalaire) est un foncteur covariant de $\mathcal{M}(R,I)$ dans $\mathcal{G}(R,I)$.
Si I est filtrant à droite, ce foncteur est injectif relativement aux modules exhaustifs ce qui permet de plonger la sous-catégorie des modules exhaustifs de $\mathcal{M}(R,I)$ dans $\mathcal{G}(R,I)$ et de plus $\mathrm{Hom}(A,B) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{A},\underline{B})$ (B peut ne pas être exhaustif)

4.1.8. Le foncteur $\overline{}$

$A \longrightarrow \bar{A} = (\bar{A}_i = A^i$, les $h^{ij} =$ surjections canoniques, les lois externes étant induites par la loi scalaire) est un foncteur covariant de $\mathcal{M}(R,I)$ dans $\mathcal{G}(R,I)$.
Si I est filtrant à gauche, ce foncteur est injectif relativement aux modules séparés-complets, ce qui permet de plonger la sous-catégorie des modules séparés-complets de $\mathcal{M}(R,I)$ dans $\mathcal{G}(R,I)$, et de plus $\mathrm{Hom}(A,B) \simeq \mathrm{Hom}(\bar{A},\bar{B})$ (A peut ne pas être séparé-complet).

4.1.9.

Dans la mesure où l'on peut se permettre de remplacer un module filtré par sa partie filtrée ($\underline{\cup}\, A_i$ si I est filtrant à droite) ou par son séparé-complété (lorsqu'il appartient à $\mathcal{M}(R,I)$ (cfr 5.1.3.), les foncteurs $\underline{\ }$ et $\overline{\ }$ permettent de considérer $\mathcal{M}(R,I)$ comme une sous-catégorie de la catégorie abélienne $\mathcal{F}(R,I)$. (pour les rapports entre un module filtré et le module qu'on lui substitue, voir 3.4. et 5.4.1.)

4.1.10. THEOREME

(1) $T_0(C,A) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{C},\bar{A})$

(2) Si I est filtrant à droite et C exhaustif, la suite
$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{C},\underline{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{C},(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{C},\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_0(C,A) \longrightarrow 0$
est exacte.

(3) Si I est filtrant à gauche et A séparé et complet, la suite
$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bar{C},\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}((C),\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{C},\bar{A}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_0(C,A) \longrightarrow 0$
est exacte.

Démonstration

(1) résulte de la définition d'un morphisme (4.1.4.) et de celle de T_0 (2.1.3.)

(2) résulte du théorème 2.1.3. (repris en 4.1.1.), des identifications de 4.1.6. et 4.1.7. et du fait qu'avec l'hypothèse $\mathrm{Hom}((C),(A)) = \mathrm{Hom}(\underline{C},(A))$.

(3) résulte du théorème 2.1.3., des identifications de 4.1.6. et 4.1.8. et du fait qu'avec l'hypothèse
$\mathrm{Hom}((C),(A)) = \mathrm{Hom}((C),\bar{A})$

4.2. Calculs explicites

4.2.1. Limites projectives

Dans la catégorie $\mathcal{F}(R,I)$ associée à une catégorie $\mathcal{M}(A,I)$ simple, les X_i sont des R-modules, les lois externes se réduisent à la loi scalaire et un morphisme est une famille de R-homomorphismes commutant avec les h^{ij}.
$\mathrm{Hom}(\underline{C},\bar{A})$ ressemble à une limite projective des $\mathcal{H}om_R(C_i,A^i)$ (où les applications seraient remplacées par des relations) et cela de deux façons différentes : avec $\leqslant$ et les relations de $\mathcal{H}om(C_i,A^i)$ vers $\mathcal{H}om(C_j,A^j)$ $(i \leqslant j)$, avec $\geqslant$ et les relations de $\mathcal{H}om(C_j,A^j)$ vers $\mathcal{H}om(C_i,A^i)$.

4.2.2. Dans le premier cas nous avons :

Proposition (1) Si $\mathcal{H}om(C_j/C_i, A^j) = 0 (i \leq j)$, $T_0(C,A)$ est limite projective de sous-groupes de $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$
(2) $T_0(C,A) \simeq \varprojlim \mathcal{H}om(C_i, A^i)$ si et seulement si, de plus, l'application de $\mathcal{H}om(C_j, A^j)$ dans $\mathcal{H}om(C_i, A^j)$ est surjective.

Démonstration : Avec la première condition, une fonction de C_i dans A^i possède au plus un relèvement de C_j dans A^j.
Les relations définissant $T_0(C,A)$ sont des fonctions de $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$ vers $\mathcal{H}om(C_j, A^j)$ et on obtient le résultat en se limitant au sous-groupe de $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$ des t_i qui sont effectivement composante d'un élément de $T_0(C,A)$.
Les conditions de la deuxième partie sont nécessaires et suffisantes pour que les relations soient des fonctions de $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$ dans $\mathcal{H}om(C_j, A^j)$.

4.2.3. Dans le deuxième cas, nous obtenons de façon tout-à-fait symétrique la

Proposition (1) Si $\mathcal{H}om(C_i, A^i_j) = 0 (A^i_j = \ker(A^i \to A^j)$, $T_0(C,A)$ est limite projective de sous-groupes de $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$
(2) $T_0(C,A) \simeq \varprojlim \mathcal{H}om(C_i, A^i)$ si et seulement si, de plus, l'application de $\mathcal{H}om(C_i, A^j)$ dans $\mathcal{H}om(C_i, A^i)$ est surjective.

4.2.4. Pour ce qui regarde les premières conditions, on peut se référer à (0.4.3.); pour 4.2.2., la deuxième condition est réalisée si pour une classe d'extensions P, $C_i \underset{P}{\subsetneq} C_j$ et A^j est P-injectif.
Dans le cas de 4.2.3., il suffit que $A^i \xrightarrow{P} A^j$ et que C_i soit P-projectif. (0.4.9.)

4.2.5. Jusqu'à la fin de cette section, nous prenons ω, $\geq$ pour I, $\leq$. La loi peut être différente de + ou . Dans le cas simple, on ajoute $+\infty$ à ω et on pose $0.n = n$, $n.m = +\infty$, $n \neq 0$, $m \neq 0$.

4.2.6. Nous supposons la catégorie simple et que pour n 0, $A^n{}_{.n-1} = \ker(A^n \to A^{n-1})$ est sommante directe de A^n.
Alors $T_0(C,A) \simeq \prod_{n > 0} \mathcal{H}om(C_n, A^n_{n-1}) + \mathcal{H}om(C_0, A^0)$
(si $t_0 : C_0 \to A^0$, t_0 induit une application $\bar{t}_0$ de C_1 dans A'^0 et t_1 doit être égal à la somme d'une application linéaire sur le noyau A^1_0 et de $\bar{t}_0$; de même pour tout n)

4.2.7. Comme exemple, étudions $\mathrm{Ext}(C,A) = \mathrm{Ext}_o(C,A)$ dans la catégorie simple $\mathcal{A}(R,\omega)$ où R est un champ. C et A peuvent être munis de bases adaptées, e et u respectivement telles que $e_{o1},\ldots$ forment une base d'un supplémentaire de C_1 dans C_o, $e_{11},\ldots$ une base supplémentaire de C_2 dans C_1, etc... (pour simplifier nous supposons C et A exhaustifs). $\mathcal{H}om(C,A)$ est isomorphe au groupe des matrices $\# e \times \# u$ à lignes finies, tandis que $\mathrm{Hom}(C,A)$ est isomorphe au sous-groupe des matrices nulles aux intersections des lignes $n,.$ et des colonnes $m,.$, $m < n$.

4.2.8. Dans une catégorie simple $\mathcal{A}(R,\omega)$ où R est commutatif, supposons que les C_n sont cycliques. Soient c_n un générateur de C_n, k_n l'ordre de c_n (idéal de R), $c_{n+1} = x_n\, c_n$.
Si B est un module et k un idéal de R, nous notons $B_{(k)}$ l'ensemble des éléments de B d'ordre au moins égal à k.
$\mathcal{H}om(C_n, A^n) \simeq A^n_{(k_n)}$. Si X_n désigne le sous-module formé des éléments de A^n image de c_n pour une application t_n compatible jusque n ($t_n \longrightarrow t_i$, $i \leq n$), X_{n+1} est le sous-module des antécédents de $x_n\, X_n$ qui appartiennent à $A^{n+1}_{(k_{n+1})}$.

4.2.9. Si $x_n\, X_n$ est divisible univoquement par x_n pour tout n, $T_o(C,A) \simeq \varprojlim X_n$ (avec les applications allant de n vers $n-1$).
Exemple : R principal, calculons $T_o(R,R)$ avec le premier R muni de la filtration q-adique, le second de la filtration p-adique, q, p premiers $(q,p) = 1$. $T_o(R,R) \simeq \lim R/p^n.R$
Si tout élément de $x_n\, X_n$ possède un unique antécédent dans $A^{n+1}_{(k_{n+1})}$, alors $T_o(C,A) \simeq \lim X_n$ (les applications allant de $n-1$ à n.

4.2.10. Si pour tout n, $x_n\, X_n$ est un singleton y, X_{n+1} est l'ensemble des antécédents de y qui appartiennent à $A^{n+1}_{(k_{n+1})}$ et $T_o(C,A) \simeq \coprod_n X_n$.
Exemple : R principal, $T_o(R,R)$ avec la même filtration p-adique pour les deux R. X_n est formé de 0 et p^{n-1} et $T_o(R,R) \simeq \coprod_n R/_pR$.

4.2.11. Munissons maintenant l'anneau R de la même filtration p-adique ; le module R est alors projectif (3.3.5.) donc $\mathrm{Ext}_o(R,R) = 0$. Directement : $T_o(R,R)$ est un sous-groupe de $\prod R/_pR$ dans lequel toute composante est déterminée par une quelconque des précédentes par la règle $t_{n+k}(p^{n+k}) = p^n.t_k(p^k)$.
En particulier, $t_1(p) = p.t_o(1) = 0$ et $T_o(R,R) = 0$.

4.2.12. $\mathrm{Hom}(R,R) = \mathcal{H}om(R,R)$ dans les cas de 4.2.10. et 4.2.11., $= 0$ dans le cas de 4.2.9. Dès lors,

$\mathrm{Ext}_o(R,R) = \hat{R}_p/R$ $\quad (R_p = \lim R/_{p^n}R)$ dans le cas 4.2.9.
$\quad = \prod_{n\in\omega} R/_pR$ dans le cas 4.2.10.
$\quad = 0$ dans le cas 4.2.11.

4.3. Cas d'annulation

4.3.1. L'étude des cas où $\mathrm{Ext}_0(C,A)$ est nul est importante d'abord parce qu'elle fournit la structure des extensions construite sur $A \dotplus C$; ensuite, parce que si $\mathcal{E}xt(C,A) = 0$, la structure de toute extension est bien déterminée ; enfin, parce qu'appliqués aux vectoriels, ces résultats, combinés avec un résu--ltat du chapitre 5, permettent de retrouver dans un contexte plus général les résultats de Serre [27] et de Monna [26] .

4.3.2. $T_0(C,A) = \mathrm{Hom}\,(\underline{C},\bar{A}) = 0.$ C'est notamment le cas si $\mathcal{H}om_Z(C_i,A^i) = 0$ pour tout i (0.4.3.).
On peut considérer des domaines d'opérateurs plus vastes (pris notamment parmi les éléments de R tels que $w(r).K \leqslant K$ pour tout K où les éléments de la forme $z.1$, $z \in Z$, pour lesquels les t_i sont linéaires en vertu de 1.3.6.(8). Si la catégorie est simple, R est un tel domaine.

4.3.3. Proposition : Supposons que deux éléments de $S \subset R$ ont toujours un multiple commun à droite, par exemple, S est un monoïde central ; si C est S-divisible et S-valué et si les A_i sont fermés pour la topologie S-adique, alors $T_0(C,A) = 0$.

Démonstration : soit $c \in C_i$, $c = s\,c_s$ pour $s \in S$. Puisque C est S-valué, il existe un $j \in w(s)$, un $k \in v(c_s)$ et $jk \leqslant i$.
Posons $t_i(c) = a_i + A_i$, $t_j(c_s) = a_j + A_j$, $t_{jk}(c) = a_{jk} + A_{jk}$.
Il faut que $a_{jk} + A_{jk} = s.(a_j + A_j) = sa_j + A_{jk}$
donc $a_i + A_i = sa_j + A_i$ mais alors $a_i \in \bigcap_{s \in S} sA + A_i = A_i$
puisque A est fermé (0.3.1.). Les $s\,A$ sont filtrants à gauche donc $t_i(c) = 0$.
En particulier la dernière condition est réalisée si A est s-borné pour un s de S.

4.3.4. Proposition Supposons que $S \subset R$ est formé d'éléments f-simplifiables (1.2.5.) ; si C est à S-torsion et A S-valué, alors $T_0(C,A) = 0$.

Démonstration : Si $c \in C_i$, il existe un s avec $sc = 0$. Pour tout $j \in w(s)$ $(w(s) \neq \emptyset)$, $t_{ji}(sc) = 0 = st_i(c)$ où $t_i(c) = a_i + A_i$. Donc, pour tout $j \in w(s)$, $w(s).v(a) \leqslant ji$, c'est-à-dire $w(s).v(a) \leqslant w(s).i$ et $v(a) \leqslant i$ (s est f-simplifiable). Mais alors $a \in A_i$, $t_i(c) = 0$, $T_0(C,A) = 0$.

4.3.5. $T_0(C,A) \neq 0$ mais $\mathrm{Ext}_0(C,A) = 0$. Si I est filtrant à droite et C exhaustif, $\mathrm{Ext}_0(C,A) = 0$ si et seulement si tout morphisme de $\underline{C}$ dans $\bar{A}$ peut être relevé en un morphisme de $\underline{C}$ dans (A). Si $\bar{I}$ est filtrant à gauche et A séparé-complet, $\mathrm{Ext}_0(C,A) = 0$ si et seulement si tout morphisme de $\underline{C}$ dans $\bar{A}$ peut être étendu en un morphisme de (C) dans $\bar{A}$(4.1.$\bar{9}$.)
Nous désignons par Z' une partie du centre de R telle que les t_i soient Z'-linéaires (4.3.2.)

<u>4.3.6. Proposition</u> : <u>Si I est filtrant à droite, C exhaustif et de filtration P-projective pour une certaine classe P (0.4.9.), si $A \xrightarrow{P} A'$ et si $\mathcal{H}om_{Z'}(C_i, A_j) = 0$ pour $i \leqslant j$ ou $j = ki$, alors $Ext_0(C,A) = 0$.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $t_i \in \mathcal{H}om_{Z'}(C_i, A^i)$. Les hypothèses assurent que l'on peut relever t_i en un Z'-homomorphisme t_i^r de C_i dans A. Soit (t_i), $i \in I$, $Hom(\underline{C}, \bar{A})$. Si $c \in C_i$ et $i \leqslant j$, $t_i^r(c) = t_j^r(c)$ car ce sont deux relèvements du même Z'-homomorphisme de C_i dans A^j. Si $r \in R_k$, $rt_i^r(.) - t_{ki}^r(r.)$ est un Z'-homomorphisme (puisque Z' est central) qui relève le Z'-homomorphisme $0 = rt_i(.) - t_{ki}(r.)$ de C_i dans A^{ki} donc

$rt_i^r(.) - t_{ki}^r(r.) = 0$.
Donc $(t_i^r) \in Hom(\underline{C}, (A))$ et $Ext_0(C,A) = 0$.

<u>4.3.7. Proposition</u> <u>Si I est filtrant à gauche, si A est séparé-complet, résiduellement P-injectif, si $C_i \subsetneq C$ et si $\mathcal{H}om_{Z'}(C^i, A^j) = 0$ pour $i \leqslant j$ ou $j = ki$, alors $Ext_0(C,A) = 0$.</u>

<u>Démonstration</u> : Si $t_i \in \mathcal{H}om_{Z'}(C_i, A^i)$, <u>les hypothèses assurent</u> qu'il existe un <u>prolongement unique t_i^p de C dans A^i.</u>
Soit $(t_i) \in \mathcal{H}om(\underline{C}, \bar{A})$. Si $i \leqslant j$, $t_i^p(c) — t_j^p(c)$ car $t_j^p(c)$ est aussi le prolongement de la projection de ti sur A^j.
Si $r \in R_k$, $rt_i^p(.) - t_{ki}^p(r.)$ est un Z'-homomorphisme qui prolonge $0 = rt_i(.) - t_{ki}(r.)$ de C_i dans A^{ki}, donc $rt_i^p(.) - t_{ki}^p(r.) = 0$ et $(t_i^p) \in Hom((\underline{C}), \bar{A})$ de sorte que $Ext_0(C,A) = 0$.

<u>4.3.8.</u> Si la catégorie est simple, on reprend le raisonnement en remplaçant Z' par R. les t_i^p et les t_i^r sont des R-homomorphismes par construction, ce qui suffit ici pour vérifier la commutation avec les lois externes (=1.3.6.(8)) et la dernière partie du raisonnement, donc la centralité de Z' est inutile.

<u>4.3.9.</u> <u>Exemples</u> (catégories simples)

- $A_i = 0$ pour tout i : on peut appliquer 4.3.6. sans autre restriction ($P : 0 \to A \to A \to 0$)
- R = Z : A est séparé-complet, résiduellement divisible sans torsion, C résiduellement à torsion (4.3.7. : avec P : toutes les extensions)
- R = Z, S ⊂ Z engendré par un ensemble non vide de premiers, C résiduellement à torsion, C_i S-pur dans C, A séparé-complet résiduellement S-algébriquement compact sans torsion (P : extensions S-pures (0.4.10;(1))

<u>4.3.10.</u> Jusquà la fin du paragraphe, <u>R est un corps valué</u>.

<u>Lemme : Si A est un sous-vectoriel régulier de codimension 1 du vectoriel valué B, alors $B = A \oplus R^{(K)}$ (3.3.5.(2)</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit c_0 un élément $\neq 0$ de $C = B/_A$.
Tout c dans C est de la forme rc_0. Puisque C est valué (car A est divisible donc résiduellement pur, 2.5.2), $v(rc_0) = w(r).v(c_0)$.
En reprenant le raisonnement de 3.3.5(2), on voit que $C \simeq R^{(v(c_0))}$ est r-projectif ($w(1)$ est neutre à droite de $w(R)$) sans qu'il soit besoin de supposer $v(C) \subseteq \mathscr{C}(I)$ puisque l'on sait que C est filtré. A est régulier donc $B = A \oplus C$.

<u>4.3.11.</u> Si I est unital, notons $\mathcal{U}(I)$ le sous-groupe des éléments inversibles de $\mathcal{J}(I)$.

<u>Lemme</u> <u>Si I est totalement ordonné et si R est $\mathcal{J}(I)$-compact comme R-module, alors $R^{(K)}$ est $\mathcal{J}(I)$-compact dès que</u>

<u>$K \in w(R) \cup \mathcal{U}(I)$</u>

<u>Démonstration</u> $R^{(K)}$ est filtré puisque $\mathscr{C}(I) = \mathcal{J}(I)$ (2.3.4.)
La démonstration est évidente pour $K = I$ ($R_i^{(K)} = R$ pour tout i)
Si $K \in w(R)$, soit $x \in R$ avec $w(x) = K$. $R_i^{(K)}x = R_i$.
A la famille centrée $\{r_i + R_i^{(K)}\}$ associons la famille $\{r_ix + R_i^{(K)} x\} = \{r_ix + R_i\}$. Elle est centrée donc possède une limite y et yx^{-1} est limite de la famille initiale.
Si $K \in \mathcal{U}(I)$, $R_i^{(K)} = \bigcap R_j$ pour $j \geqslant iK^{-1}$ ($w(r)K \leqslant i \Leftrightarrow w(r) \leqslant iK^{-1}$)
A la famille centrée $\{r_i + R_i^{(K)}\}$ associons la famille $\{r_i + R_j\}$ $j \geqslant iK^{-1}$. Elle est centrée donc possède une limite x qui est aussi limite de la famille initiale.

<u>4.3.12.</u> <u>THEOREME</u> <u>Si I est totalement ordonné, R $\mathcal{J}(I)$-compact A sous-vectoriel de codimension au plus dénombrable du vectoriel valué B et si $v(B) \subset w(R) \cup \mathcal{U}(I)$, alors $B = A \oplus C$, C filtré-libre régulier (3.3.6.)</u>

<u>Démonstration</u> : Si B A, soit $b \neq 0$, $b \notin A$.
A est régulier dans B (2.4.4.) donc dans $A' = \text{vct}\{A, b\}$.
Donc $A' = A \oplus R^{(K)}$ (lemme 4.3.10.) avec $K \in v(C)$.
Mais $v(C) \subset v(B)$ (régularité!) et $v(B) \subset \mathcal{U}(I) \cup w(R)$, donc $R^{(K)}$ est $\mathcal{J}(I)$-compact (4.3.11.)
A' est $\mathcal{J}(I)$-compact comme somme directe des modules $\mathcal{J}(I)$-compacts et le résultat vient par récurrence.

<u>4.3.13.</u> <u>Corollaire</u> : <u>Si I est totalement ordonné et R $\mathcal{J}(I)$-compact, alors tout vectoriel B de dimension au plus dénombrable avec $v(B) \subset w(R) \cup \mathcal{U}(I)$ est filtré-libre régulier</u>.

<u>Démonstration</u> : on prend $a \neq 0$, vct $\{a\}$ est $\mathcal{J}(I)$-compact (lemme 4.3.11.) et réalise les conditions du A du théorème 4.3.12.

<u>4.3.14.</u> Le théorème constitue une généralisation par une autre méthode d'un théorème de Monna [26] où R est un champ, I_0 le groupe des réels positifs, les modules étant proprement filtrés.
Serre [27] obtient un résultat comparable, mais sans restriction sur la dimension, dans le cas des valuations discrètes réelles.

CHAPITRE 5 : LE COMPLETE

A toute filtration de module est associée une topologie de groupe abélien (1.1.8) ; on découvre facilement quand cette topologie est une topologie de module (5.1.1. à 5.1.4.). Dans ce cas, on peut introduire une extension filtrée : le complété, qui est une limite projective de groupes (0.3.4). C'est donc un cas particulier de la limite projective filtrée (1.1.6.) et nous nous plaçons dans ce cadre, ce qui nous permet d'étudier le complété pour une filtration auxiliaire (5.1.8.) Lorsque cette filtration auxiliaire est une filtration S-adique, on obtient une extension qui a une propriété intéressante d'injectivité partielle (5.4.) En 5.2 et 5.3, nous étudions spécialement la possibilité de transférer certaines décomposi--tions en sommes interdirectes de modules à leur limite projective.

Dans ce chapitre, toutes les catégories ont la propriété :

P_1 : I_0 est filtrant à gauche.

5.1. Topologie et complété

5.1.1. La topologie de la filtration de R (1.1.8.) n'est pas nécessairement une topologie d'anneau de R ; la topologie d'un R-module filtré n'est pas nécessairement une topologie de R-module. Par exemple, si R' est un sous-groupe de R et r tel que $rR' \not\subset R'$, la multiplication par r n'est pas continue dans la topologie engendrée par R'.

5.1.2. Proposition Si la filtration de R est exhaustive et si I réalise la condition

$P_2 : \forall i, j \in I_0, \exists k_1, k_2 \in I_0, ik_1 \leq j \quad k_2 i \leq j.$

alors R est un anneau topologique.

Démonstration : P_1 et P_2 entraînent :

$P_3 : \forall i \in I_0, \exists k \in I_0$ avec $k^2 \leq i$.

(il existe un j tel que $ji \leq i (P_2)$ et pour $k \leq i, j (P_1), k^2 \leq ij \leq i$. Par l'exhaustivité tout x appartient à un R_j. Maintenant pour tout x et tout R_i, il existe un k tel que $jk \leq i$ (P_2) et $xR_k \subset R_j R_k \subset R_i$. De même dans l'autre sens. Il existe un $R_k . R_k \subset R_i$ (P_3). La multiplication est donc continue et R est un anneau topologique.

5.1.3. On démontre de même que, si R est exhaustif et que I réalise P_2, tout module exhaustif est un R-module topologique.

5.1.4. P_2 est notamment réalisé si I est un groupe ou si $I = \omega, +, \geqslant$.

P_2 est équivalent à $iI_0 \subset I_0$, $I_0 i \subset I_0$. (l'égalité a lieu si i n'est pas un diviseur de zéro).

Le I d'une catégorie simple réalise P_2 .
Dans ce chapitre, nous supposons désormais que toutes les catégories satisfont à 5.1.2. P_2 et que les filtrations sont exhaustives.

5.1.5. Considérons une famille de D-modules I-filtrés, indexés par un ensemble ordonné filtrant à gauche K, $\leq$. Nous supposons que pour des morphismes $p^{k,k'}$ de A^k dans $A^{k'}$ $(k \leq k')$, nous pouvons construire la limite projective filtrée $\hat{A}$ (1.1.6.) Notons $p^k : \hat{A} \longrightarrow A^k$.
Les sous-modules de la filtration sont notés $\hat{A}_i$ et la topologie correspondante $\mathcal{T}_f$ (topologie de $A^k \equiv \mathcal{T}^k$)

5.1.6. $\hat{A}$ peut être muni de la topologie $\mathcal{T}_t$ induite par la topologie de Tychonoff de $\prod A^k$. Cette topologie est engendrée par les $\hat{A}_{k,i} = \{\hat{a} \in \hat{A} \mid p^k(\hat{a}) \in A^k_i\}$.

5.1.7. Les $\hat{A}_k = \ker p^k$ déterminent une filtration (pour la catégorie simple $\mathcal{M}(D,K)$ de $\hat{A}$. La topologie correspondante $\mathcal{T}_n$ est plus fine que $\mathcal{T}_t$.

5.1.8. Si A est un R-module I-filtré (topologie associée $\mathcal{T}$) muni en outre d'une K-filtration auxiliaire séparée de topologie associée $\mathcal{T}_a$, alors le complété $\hat{A}$ de A pour $\mathcal{T}_a$ est le R-module limite projective des groupes A^k, la multiplication étant définie par continuité. C'est un cas particulier de 5.1.5., avec D = Z.1,.
Naturellement, les deux filtrations peuvent être identiques. Notons $\bar{\mathcal{T}}$ la topologie associée à la filtration $\bar{A}_i$ = fermeture de A_i pour $\mathcal{T}_a$. $(A, \bar{A}_i)$ est un R-module I-filtré.

5.1;9 Dans ce cas nous avons la

Proposition a) $\mathcal{T}_n$ prolonge $\mathcal{T}_a$; en fait $\mathcal{T}_n$ est la topologie $\mathcal{T}_t$ et la topologie $\mathcal{T}_f$ correspondant à $\mathcal{T}_a$
b) $\mathcal{T}_t$ prolonge $\mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T}_a$ est plus fine que $\mathcal{T}$.
c) $\mathcal{T}_f$ prolonge $\mathcal{T} \Leftrightarrow \bar{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.
d) $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_n \Leftrightarrow \mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_a$.
e) $\mathcal{T}_n$ est plus fine que $\mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{T}_a$ est plus fine que $\bar{\mathcal{T}}$.
f) $\mathcal{T}_n$ est moins fine que $\mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{T}_a$ est moins fine que $\bar{\mathcal{T}}$.
g) $\mathcal{T}_t$ est égale à $\mathcal{T}_f \Leftrightarrow \mathcal{T} + \mathcal{T}_a$ est plus fine que $\bar{\mathcal{T}}$.

Démonstration a) Pour $a \in A$, $p^k(a) = 0 \Leftrightarrow a \in A_k$. D'autre part, $\mathcal{T}_n$ est plus fine que la topologie de Tychonoff induite par $\mathcal{T}_a$; pour cette topologie les A^k sont discrets donc les $\hat{A}_k$ ouverts ce qui entraîne l'égalité. Enfin,
$A_k = \varprojlim A_k + A_{k''}/A_{k'}$ $(k' \in K)$

b) La restriction de $\mathcal{T}_t$ à A a pour système fondamental de O $A_j + A_k$ donc c'est la somme des topologies $\mathcal{T}_a + \mathcal{T}$, le résultat en découle
c) $a \in \hat{A}_i \cap A \Leftrightarrow a \in \bigcap_k A_i + A_k = \bar{A}_i$.
d) Les $\hat{A}_k$ sont ouverts pour $\mathcal{T} \Leftrightarrow$ les A^k sont discrets pour $\mathcal{T}^k$, donc $\Leftrightarrow$ les A_k sont ouverts, c'est-à-dire si $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_a$.
e) Si $\mathcal{T}_n$ est plus fine que $\mathcal{T}_f$, sa restriction $\mathcal{T}_a$ doit être plus fine que la restriction $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}_f$. Si pour tout i, il existe un k tel que $A_k \subset \bar{A}_i$, alors $\hat{A}_k \subset \hat{A}_i$ et $\mathcal{T}_n$ est plus fine que $\mathcal{T}_f$.
f) Même raisonnement, à l'envers, qu'en e).
g) La restriction de $\mathcal{T}_f$ doit être plus fine que celle de $\mathcal{T}_t(b,c)$. Si pour tout i, il existe un k et un $j \in I$ avec $A_j + A_k \subset \bar{A}_i$ alors $\hat{A}_{j,k} \subset \hat{A}_i$ et $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_t$.

<u>5.1.10.</u> <u>$\hat{A}$ est une extension I-filtrée de A si et seulement si $\bar{A}_i = A_i$ (proposition, c).</u>

<u>5.1.11.</u> Si $\hat{A}$ est le complété de A pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a$, $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_f = \mathcal{T}_t$ (proposition, a)

<u>Proposition</u> : <u>Si I est totalement ordonné, $\hat{A}$ est proprement filtré (respectivement :S-valué) si et seulement si A est proprement filtré (respectivement : S-valué)</u>

<u>Démonstration</u> : A est séparé (5;1.8 : $\mathcal{T}_a = \mathcal{T}$), donc $\hat{A}$ l'est aussi. Si $\hat{a} \in \hat{A}$, il existe un système de a_k dans A convergeant vers $\hat{a}$. Pour $i \leq v(\hat{a})$ (i existe puisque $\hat{A}$ est séparé), $v(\hat{a} - a_{k(i)}) \in \hat{A}_i$ entraîne $v(\hat{a}) = v(a_k)$, $k \leq k(i)$. Donc si A est proprement filtré, $\hat{A}$ l'est aussi. Maintenant, sa_k converge vers $s\hat{a}$ et pour un certain k on aura $v(s\hat{a}) = v(sa_k) = w(s).v(a_k) = w(s).v(\hat{a})$ si A est S-valué.

<u>5.2. Transfert de décompositions en sommes interdirectes</u>

<u>5.2.1.</u> Dans le cas de 5;1.8., $\hat{A}$ est un R-module par continuité et si A_1^k est une famille de sous-groupes des A^k $\hat{A}_1 = \{\hat{a} \in \hat{A} \mid p^k(\hat{a}) \in A_1^k\}$ est muni d'une structure de R-modules si les (A_1^k) forment un sous-objet de $\bar{A}$ dans $\mathcal{F}(R,K)$ (si $\hat{a}_1 - a_k \in \hat{A}_k$ où $p^k(a_k) \in A_1^k$ et si $r \in R_t$, $t \in K$, $r\hat{a}_1 - ra_k \in \hat{A}_{tk}$, $p^{tk}(ra_k) \in A_1^{tk}$ par la condition. Maintenant, si $k' \in K$, il existe un k avec $tk \leq k'$ (5.1.2. P_2), donc $r\hat{a}_1 \in \hat{A}_1$ qui est un R-module)

<u>5.2.2.</u> Plaçons-nous maintenant dans le cas général de 5.1.5. Soit H un ensemble d'indices et pour tout k une famille de sous-modules B_h^k de A^k, $h \in H$ et une deuxième famille T_h^k de sous-modules avec $T_h^k \subset B_h^k$.

Supposons que pour tout k, <u>A^k est la somme interdirecte des B_h^k relativement aux T_h^k</u>, c'est-à-dire que A^k est le sous-module de $\prod_h B_h^k$ dont presque toutes les composantes (toutes, sauf un nombre fini) appartiennent aux T_h^k.
Supposons de plus que
pour $k \leq k'$, si $x=(x_h^k)$ et $y=(y_h^{k'})$, $p^{k,k'}(x)=y \Leftrightarrow p^{k,k'}(x_h^k)= y_h^{k'}$.

Pour tout h, nous pouvons construire
$\hat{B}_h = \varprojlim B_h^k$ et $\hat{T}_h = \{(b^k) \in \hat{B}_h \mid b^k \in T_h^k\}$.
Soient B la somme interdirecte des $\hat{B}_h$ relativement aux $\hat{T}_h$ et $B^* = \prod_h \hat{B}_h$.

<u>5.2.3. THEOREME</u>
<u>(1) $B \subset \hat{A} \subset B^*$.</u>
<u>(2) Si $p^k(\hat{B}_h) \cap T_h^k = p^k(\hat{T}_h)$ pour presque tout h (dépendant de k) alors B est dense dans $\hat{A}$ pour tout $\mathcal{T}_n$.</u>
<u>(3) Si $T_h^k = B_h^k$, alors $\hat{A} = B = B^*$.</u>

<u>Démonstration</u> :(1) $\hat{A} \subset B^*$: si $(a^k) =((b_h^k))$, les b_h^k, h fixe, se correspondent (5.2.2.). $(b_h^k) \in \hat{B}_h$ et (a^k) est le produit des (b_h^k) pour $h \in H$ donc $(a^k) \in B^*$.
$B \subset \hat{A}$: si $b =((b_h^k)) \in B$, (b_h^k), k fixe, $\in A^k$ et b, leur limite $\in \hat{A}$.

(2) Pour tout k, $B \to \hat{A}_k = \hat{A}$;
car si $a \in \hat{A}$, $a=((b_h^k))$, $a^k=(b_h^k)$, k fixe, $b_h^k \in B_h^k$ et presque tous les $b_h^k \in T_h^k$. Pour h fixe, $(b_h^k) \in \hat{B}_h$; si $b_h^k \notin T_h^k$, on le relève en (b_h^k) lui-même.
Si $b_h^k \in T_h^k$, $b_h^k \in p^k(\hat{B}_h) \cap T_h^k = p^k(\hat{T}_h)$ pour presque tous les h et pour ceux-là on les relève en des éléments de $\hat{T}_h$.
Le produit des relèvements appartient à B et sa projection est a^k.

(3) Si $T_h^k = B_h^k$ (cas du produit direct), alors
$\varprojlim T_h^k = \varprojlim B_h^k$ et $B = B^*$.

<u>5.2.4.</u> Si $\hat{T}_h$ est limite projective minimale (0.2.3.) des T_h^k pour presque tout h, la condition du théorème est réalisée.
Si B_h est limite projective minimale et $p^{k,k'}(T_h^k) \subset T_h^{k'}$ pour $k \leq k'$, cette condition est nécessaire . Ainsi en est-il dans la situation de 5;1.8. : A est alors minimale et donc aussi les $\hat{B}_h$.

<u>5.2.5.</u> $\hat{T}_h$ est minimale notamment si
-$T_h^k = 0$ pour tout k (par exemple : A^k somme directe des B_h^k.)
- T_h^k linéairement compacts, pour tout k, pour une topologie telle que $p^{k,k'}$ soient des surjections continues (continuité assurée pour $\mathcal{T}^k$ ou la topologie discrète) C'est un résultat bien connu : cfr Lefschetz [22] , p.32.
-les $p^{k,k'}$ sont des surjections de T_h^k sur $T_h^{k'}$, et K a un sous-ensemble cofinal dénombrable (par récurrence).

5.2.6. Proposition (1) Si, pour tout k, A_i^k est la somme interdirecte de ses composantes, alors $\hat{A}_i \cap B$ et $\hat{A}_{i,k} \cap B$ sont aussi sommes interdirectes de leurs composantes.
(2) $\hat{A}_k \cap B$ est somme interdirecte de ses composantes.

Démonstration (1) $a = (b_h^k)$;
$a \in \hat{A}_i \Rightarrow (b_h^k) \in A_i^k$ (k fixe) $\Rightarrow b_h^k \in A_i^k$ (hypothèse)
$\Rightarrow (b_h^k) \in A_i = \varprojlim A_i^k$ (h fixe).
Réciproquement, $(b_h^k) \in \hat{A}_i$ (h fixe) $\Rightarrow b_h^k \in A_i^k \Rightarrow$ (hypothèse)
$(b_h^k) \in A_i^k$ (h fixe) et finalement $a \in \hat{A}_i$.
De même pour $\hat{A}_{i,k} \cap B$.

(2) Immédiat.

5.2.7. Si $\hat{O}$ est un sous-module ouvert pour $\mathcal{T}_n$ dans $\hat{A}$, alors $B + \hat{O} = \hat{A}$.
Si $\hat{O}$ est le produit direct de ses composantes $\hat{O}_h = \hat{O} \cap \hat{B}_h$, alors $\hat{A}$ est somme interdirecte des $\hat{B}_h$ relativement aux $\hat{T}_h + \hat{O}_h$.

5.2.8. Proposition Si $\hat{A}$ est le complété de A pour $\mathcal{T}_a$ et si O est un sous-module de A, ouvert pour $\mathcal{T}_a$ et résiduellement produit direct de ses composantes, alors $\hat{A}$ est la somme interdirecte des $\hat{B}_h$ relativement aux sous-modules $\hat{T}_h + [(\varprojlim(O + A_k/A_k)) \cap \hat{B}_h]$.

Démonstration : $O_k = O + A_k/A_k$, $\hat{O} = \varprojlim O_k$. $\hat{O}$ est le complété de O pour $\mathcal{T}_a$.
Comme O est ouvert dans A, $\hat{O}$ est ouvert dans $\hat{A}$ pour la topologie du complété $\mathcal{T}_n$. D'autre part, si O_k est produit direct de ses composantes, il en est de même de $\hat{O}$ (même raisonnement qu'en 5.2.6). Le résultat découle alors de 5.2.7.

5.3. Cas particuliers des sommes directes

5.3.1. Nous ne considérons plus ici que des décompositions en sommes directes ; l'hypothèse du théorème 5.2.3. est réalisée 5.2.5.) et la condition sur les décompositions de 5.2.2. est simplement $p^{k,k'}(B_h^k) \subset B_h^{k'}$.

5.3.2. Si $A = \bigoplus_{h \in H} B_h$, $A^k = \bigoplus_{h \in H} B_h^k$ ($B_h^k = B_h + A_k/A_k$) et les hypothèses sont satisfaites.
$\hat{A}$ est alors compris entre $\oplus \hat{B}_h$ et $\prod \hat{B}_h$. En fait, $\hat{A}$ est l'ensemble des éléments de $\prod \hat{B}_h$ dont presque toutes les composantes appartiennent à A_k ($b_h \longrightarrow 0$).
Pour $R = Z$, on peut prendre la filtration p-adique comme filtration auxiliaire. Un théorème de Fuchs [13] assure alors l'existence d'un p-groupe de base B_o (somme directe de groupes cycliques infinis ou p-groupes, pur et dense pour $\mathcal{T}_a$ dans A).

Alors $\hat{A} = \hat{B}_0$ et $\hat{B}_0$ peut être décrit suivant la méthode indiquée. (la décomposition est directe car $p^k B_0$ est endostable) On pourrait ainsi retrouver des résultats de Boyer [6] .

5.3.3. Dans le paragraphe 4.3, nous avons rencontré des exemples de sommes directes. Particulièrement, le théorème 4.3.11. et son corollaire nous fournissent des décompositions directes de R-vectoriels en composantes cycliques. Le complété d'un tel vectoriel sera l'ensemble des suites (x_k), $x_k \in \hat{R}^{(K)}$, $v(x_k) \to 0$. Ceci établit -avec une condition sur la dimension mais dans un cas plus général- le résultat de Serre [27] .

5.3.4. Supposons que chaque A^k soit décomposable en $\dot{+}\, B^k_h$, $h \in H^k$, et que pour $k \leq k'$, $p^{k,k'}(B^k_h) = \dot{+}\, B^{k'}_{h'}$ (pour $h' \in T^{k,k'}_h$, $T^{k,k'}_h \subset H^{k'}$) ou 0, tandis que à tout $B^{k'}_{h'}$ est associé un B^k_h, unique tel que $h' \in T^{k,k'}_h$. Alors on peut construire une décomposition satisfaisant à 5.2.2.
En effet, introduisons dans $\bigcup H^k$ la relation
$h^k \sim h'^{k'} \Leftrightarrow \exists k''$, $k'' \leq k$, $k'' \leq k'$ et un $B^{k''}_h$ tel que $h^k \in T^{k'',k}_h$, $h^{k'} \in T^{k'',k'}_h$. C'est une relation d'équivalence, la transitivité résultant de la transitivité des $p^{k,k'}$.
Alors en sommant pour chaque k les B^k_h d'indices équivalents, on obtient une décomposition des A^k. Si $B^k_{\bar{h}}$, $\bar{h}$ classe de h, est une composante et $k \leq k'$, $p^{k,k'}(B^k_{\bar{h}}) \subset B^{k'}_{\bar{h}}$ d'où le résultat (5.3.1.)

5.3.5. Soit maintenant $\mathscr{C}$ une propriété des sous-modules d'un D-module, $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des sous-modules de A satisfaisant $\mathscr{C}$; supposons que si $M, N \in (A)$, $M \cap N \in \mathscr{C}(A)$ (1)

Définitions Une décomposition de A en somme directe est $\mathscr{C}$-compatible si et seulement si les composantes appartiennent à $\mathscr{C}(A)$ et si tout $M \in \mathscr{C}(A)$ est somme de ses intersections avec les composantes. Une telle décomposition est maximale si ses composantes ne possèdent pas de décomposition en modules de $\mathscr{C}(A)$ pour laquelle tout module de $\mathscr{C}(A)$ inclus dans la composante serait somme directe de ses intersections.
Un homomorphisme g de A sur B est $\mathscr{C}$-compatible si $\ker g \in \mathscr{C}(A)$, $g(\mathscr{C}(A)) \subset \mathscr{C}(B)$, $g^{-1}(\mathscr{C}(B)) \subset \mathscr{C}(A)$.

5.3.6. Lemme : Si $B = g(A)$, g $\mathscr{C}$-compatible, alors une décomposition $\mathscr{C}$-compatible de A a pour image une décomposition $\mathscr{C}$-compatible de B.

Démonstration : soit $A = \dot{+} A_h$ une décomposition $\mathscr{C}$-compatible. $g(A_h) \in \mathscr{C}(B)$. Les $g(A_h)$ décomposent B puisque $\ker g \in \mathscr{C}(A)$ donc est décomposé par les A_h. Si $C' \in \mathscr{C}(B)$, $g^{-1}(C') \in \mathscr{C}(A)$ donc est décomposé par les A_h et C' est décomposé par les $g(A_h)$ puisque $C' \cap \ker g \in \mathscr{C}(A)$.

5.3.7. THEOREME Si les $p^{k,k'}$ sont $\mathscr{C}$-compatibles et les A^k maximalement $\mathscr{C}$-décomposables, alors il existe une décomposition des A^k satisfaisant à 5.2.2. Elle est $\mathscr{C}$-compatible si la somme directe de sous-modules réalisant $\mathscr{C}$ réalise $\mathscr{C}$.

Démonstration : Une décomposition maximale est unique : si $M = \dot{+} M_h$ et $M = \dot{+} N_t$ sont $\mathscr{C}$-compatibles maximales, $M = \dot{+}_{h,t} (M_h \cap N_t)$ est $\mathscr{C}$-compatible (5.3.5.(1)).
Comme M_h est $\mathscr{C}$-indécomposable, $M_h \cap N_t = M_h$ ou 0, il y a un seul M_h tel que $M_h \subset N_t$ et inversément, donc les deux décompositions sont les mêmes. Considérons, pour $k \leq k'$ l'image dans $A^{k'}$ de la décomposition maximale $A^k = \dot{+}_{h \in H^k} B^k_h$.
Elle est $\mathscr{C}$-compatible (lemme) et
$p^{k,k'}(B^k_h) = \dot{+} (p^{k,k'}(B^k_h) \cap B^{k'}_{h'}) = \dot{+} B^{k'}_{h'}$ pour h' appartenant à une certaine partie de $H_{k'}$ sinon la décomposition de $B^{k'}$ ne serait pas maximale. D'autre part, $(p^{k,k'})^{-1}(B^{k'}_{h'}) = \dot{+} C^k_h$ avec $C^k_h = (p^{k,k'})^{-1}(B^{k'}_{h'}) \cap B^k_h$ et pour tous les h sauf un, $C^k_h \subset \ker p^{k,k'}$ (autrement on obtiendrait une décomposition de $B^{k'}_{h'}$). Les conditions de 5.3.4. sont donc réalisées et la première partie en résulte. La seconde est évidente.

5.3.8. Exemple Soit A un module résiduellement semi-simple. La décomposition en composantes isotypiques est $\mathscr{C}(A^k)$-compatible ($\mathscr{C}$ vide), tout épimorphisme est $\mathscr{C}$-compatible. On vérifie que la décomposition est bien maximale. Ici, l'image d'une décomposition maximale est maximale.

5.3.9. Exemple Si R est principal et si A est un module résiduellement à torsion, la décomposition des A^k en composantes p-primaires est $\mathscr{C}$-maximale ($\mathscr{C}$ Vide). Ici aussi l'image de la décomposition maximale est exactement la décomposition maximale.

5.3.10: Pour qu'un sous-module ouvert O résiduellement à torsion n'ait qu'un nombre fini de composantes non-nulles dans ses décompositions p-primaires résiduelles, il faut et il suffit que pour tout k et presque tout premier p dépendant de k, pour tout $o \in O$, $po \in A_k$ entraîne $o \in A_k$. C'est notamment le cas si O est compact pour $\mathcal{T}_a$ (exemple des groupes localement compacts). C'est une généralisation du théorème de décomposition des groupes abéliens en composantes p-primaires.

<u>5.3.11.</u> Si $A^k = \dotplus_p A^k_p$, $A_p = \varprojlim A^k_p$, A_p est caractérisé par la :

<u>Proposition</u> : <u>A_p est le séparé-complété de A pour la topologie engendrée par les $A^p_k = \{a \in A \mid \exists\, n,\ (n,p) = 1$ et $na \in A_k\}$</u>.

<u>Démonstration</u> Soit $h_k : A \longrightarrow A^k_p : a \longrightarrow$ p-composante de $a \dotplus A_k$. C'est un épimorphisme et $\ker h_k = A^p_k$. Il reste à vérifier que $\lim A^k_p = \varprojlim A/A^p_k =$ complété de A.
Les A^k_p forment un ensemble filtrant à gauche pour $\subset$.
Si $k \leq k'$ le schéma

$$\begin{array}{ccc} A/A^p_k & \longrightarrow & A^k_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/A^p_{k'} & \longrightarrow & A^{k'}_p \end{array}$$

est commutatif.

Si $A^p_k \subset A^p_{k'}$, sans que $k \leq k'$, il existe un $k'' \leq k, k'$ et $A^p_{k''} \subset A^p_k \subset A^p_{k'}$ et les deux limites sont isomorphes.

<u>5.3.12.</u> <u>THEOREME</u> : <u>Si $K, \leq\ = \omega, \geq$, si T est un type de décomposition de D-modules tel que toute sommante directe d'un module décomposable de type T soit décomposable de type T et si A est résiduellement décomposable de type T et résiduellement de K-filtration en sommantes directes, alors les conditions de 5.2.2. sont réalisées</u>.

<u>Démonstration</u> : Prenons une décomposition quelconque de type T sur A^0. Puisque le noyau est sommante directe de A^1, $A^1 = A'^0 + A^1_0$ avec $A'^0 \simeq A^0$. Prenons sur A'^0 la décomposition transportée de A^0 et sur A^1_0 une quelconque décomposition du type T. Alors, $p^{1,0}$ réalise les conditions requises.
Le résultat vient par récurrence.

<u>5.3.13.</u> <u>Exemples</u>
1) Si A est résiduellement semi-simples, les autres conditions sont réalisées pour T = décomposition en modules simples.
2) D = Z, A résiduellement divisible sans torsion. Toutes les conditions sont remplies pour T = décomposition en groupes Q.
3) A résiduellement libre. Les noyaux sont toujours sommantes directes mais pas nécessairement libres (c'est cependant le cas si D = Z et même si tout idéal gauche de D est libre([7] ,p.17).
4) Si A est résiduellement somme directe de groupes cycliques ou module de longueur finie avec la décomposition en modules indécomposables, il faut supposer simplement que $A^k_{k'}$ est sommante directe.

5.4. Rapports avec Ext.

5.4.1. Si A est séparé, l'injection canonique de A dans son complété $\hat{A}$ est un morphisme propre injectif (5.1.10). Appliquons le théorème 3.2.5.

Proposition La suite $\mathcal{H}om(X,\hat{A}/_A) \longrightarrow Ext(X,A) \longrightarrow Ext(X,\hat{A}) \longrightarrow \mathcal{E}xt(X,\hat{A}/_A)$ est exacte pour tout X.

Démonstration Il suffit de vérifier que $Hom(X,A') = \mathcal{H}om(X,A')$, $Ext(X,A') = \mathcal{E}xt(X,A')$ $(A' = \hat{A}/_A)$.
Or $A'_i = A'$ pour tout i puisque A est dense dans $\hat{A}$.
Soit h un homomorphisme de X dans A', $h(X_i) \subset A'_i = A'$ et h est un morphisme. Si t_i est un homomorphisme de X_i dans A'^i, $t_i = 0$, $T_0(X,A') = 0$ et $Ext_0(X,A') = 0$.
Si (f,u) est un couple, $x,y \in X_i$, $f(x,y) \in A'_i$, $u(r,x) \in A'_i$ pour tout r ; tout couple est donc équilibré et
$Ext(X,A') = \mathcal{E}xt^f(X,A') = \mathcal{E}xt^e(X,A') = \mathcal{E}xt(X,A')$.

5.4.2. Remarque : $Hom(X,\hat{A}) = \varprojlim Hom(X^i,A^i)$ (on applique la proposition 1.1.7.(3) au cas où $X = \varprojlim X$ et on remarque que $Hom(X,A^i) \simeq Hom(X^i,A^i)$)

5.4.3. Nous supposerons juqu'à la fin du paragraphe que R est un anneau principal ($\neq$ champ). Si p est un premier de R et A un R-module, nous notons $\hat{A}_p$ le complété-séparé de A pour la topologie p-adique. La topologie $\mathcal{T}_n$ de $\hat{A}_p$ est la topologie p-adique ([25] , p 8) et $\hat{A}_p$ est p-linéairement compact (0.4.10;) donc cotorsion ([25] , p 11 et(0.4.10))
Considérons maintenant une famille P de premiers de R et A avec la topologie S-adique où S est le monoïde multiplicatif engendré par P. Chaque $A^s = A/_{sA}$ est somme directe d'un nombre fini de composantes p-primaires donc (5.2.3., 5.3.7.) le complété-séparé $\hat{A}_P$ est produit direct des limites projectives des composantes p-primaires. Chacune de ces limites est le complété de A pour la topologie des $(sA)P$ (5.3.11.)
Si $s \in S$, $(s,p) = 1$, $(sA)P = A$;
si $s \in S$, $s = p^k q$, $(p,q) = 1$, $(sA)P = p^k A$.
Cette topologie est donc la topologie p-adique de A.
Ainsi $\hat{A}_P = \prod_{p \in P} \hat{A}_p$ et $\hat{A}_P$ est P-algébriquement compact, donc cotorsion ([25] , p 11)

5.4.4. Supposons désormais que A est I-filtré, n'a pas d'éléments complètement S-divisibles ($\neq 0$) et que $A_i = \bar{A}_i$ (-adhérence pour la topologie P-adique). A est ainsi séparé pour la topologie P-adique. Nous sommes dans la situation de 5.1.9. et $\hat{A}_P$ est une extension I-filtrée de A (5.1.10.)

(la deuxième condition est équivalente à : A est résiduellement sans éléments complètement divisibles $\neq 0$. Si A est séparé, la deuxième condition entraîne la première).
Posons $\hat{A}_P/A = A'$

<u>5.4.5. Proposition</u> <u>(1) $\hat{A}_i$ est l'adhérence de A_i pour la topologie $\mathcal{T}_n$ de $\hat{A}$.</u>
<u>(2) Si A_i est S-pur, alors $\hat{A}_i$ est son complété pour la topologie S-adique, donc S-algébriquement compact.</u>
<u>(3) Si A est séparé et linéairement compact, alors $A^i = \lim A^{si} (s \quad S)$.</u>

<u>Démonstration</u> (1) immédiat par la construction de
$$\hat{A}_i = \varprojlim A_i + sA/sA.$$
(2) Si A_i est S-pur, la topologie induite sur A_i par la topologie S-adique de A est la topologie S-adique.
(3) Pour $s \in S$, sA est linéairement compact donc fermé (s. continue 0.3.5.). A^s est linéairement compact et $\hat{A}_P$ aussi (0.3.5.)
$A^i = \lim A^s/\lim A^s_i \subset \lim A^{s,i} = \lim(A^s/A^s_i)$. D'autre part, si $(a^s) \in \lim A^{s,i}$ et s' divise s, $a^{s'}$-projection$(a^s) \in A^{s'}_i$.
Il y a donc un système $(\hat{a}^s)$ d'antécédents des a^s dans $\hat{A}_P$ qui forment un système de Cauchy pour la topologie des $A_{s,i}$ (i fixe), moins fine que $\mathcal{T}_t$ donc complète (0.3.5.)
Si $\hat{a}$ est une limite des $\hat{a}^s$, $\hat{a} + \hat{A}_i$ a (a^s) comme images, ce qui termine la démonstration.

<u>5.4.6. Proposition</u> <u>(1) Si X est sans torsion, alors la suite</u>
$$\mathrm{Hom}(X,\hat{A}_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A') \longrightarrow \mathrm{Ext}(X,A) \xrightarrow{h} \mathrm{Ext}_0(X,\hat{A}_P) \longrightarrow \mathrm{Ext}_0(X,A')$$
<u>est exacte. De plus</u>
<u>(2) Si A est résiduellement S-borné, alors h est surjective.</u>
<u>(3) Si I est filtrant à droite, X exhaustif et A à filtration complète pour $\mathcal{T}_a$, alors h est bijectif.</u>

<u>Démonstration</u> : (1) résulte du théorème 3.2.5. et de la cotorsion de $\hat{A}_P$ (5.4.3.)
(2) A est dense dans $\hat{A}$ pour $\mathcal{T}_a$. Si A est résiduellement S-borné, $\mathcal{T}_a$ est plus fine que $\mathcal{T}$, donc A_i est ouvert pour $\mathcal{T}_a$ et $\hat{A}_i$ pour $\mathcal{T}_n$ (5.4.5.(1)) de sorte que
$A + \hat{A}_i = \hat{A}_P$, $A'_i = A'$, $A'^i = 0$ et $T_0(X,A') = 0$.
(3) Ici $A_i = \hat{A}_i$ (5.4.6.(1)), $A'_i = 0$, $A'^i = A'$.
X est exhaustif donc $\mathrm{Hom}(X,A') = 0$. Si $t_i : X_i \longrightarrow A'$, on peut trouver un t prolongeant les t_i et $\mathrm{Ext}_0(X,A') = 0$.

5.4.7. THEOREME Si X est sans torsion, S-divisible, S-valué, alors $\mathrm{Ext}(X,A) \simeq \mathrm{Hom}(X,A')/\mathrm{im}\ \mathrm{Hom}(X,\hat{A}_P)$

Démonstration : Considérons la suite exacte

$\mathrm{Hom}(X,\hat{A}_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A') \longrightarrow \mathrm{Ext}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_o(X,\hat{A}_P)$ (5.4.6.(1))

Par 4.3.3. $\mathrm{Ext}_o(X,\hat{A}_P) = 0$ puisque X est S-divisible et S-valué, que S est un monoïde (central) et que les $\hat{A}_i$ sont fermés pour la topologie $\mathcal{T}_n$ (5.4.5.(1)) donc, a fortiori, pour la topologie S-adique de $\hat{A}_P$ qui est plus fine

$(s\hat{A} \subset (sA))$

Ce théorème fournit une sorte d'injectivité partielle : tout module réalisant les conditions de 5.4.4. peut être plongé dans un monoïde injectif pour les extensions de la forme $0 \longrightarrow T \longrightarrow U \longrightarrow X \longrightarrow 0$ où X est sans torsion, S-divisible et S-valué.

CHAPITRE 6 MODULES DE FRACTIONS FILTRES

Dans ce chapitre, nous étudions quelques extensions construites sur des modules de fractions et liées à la notion de boule unité. Le paragraphe 1 étudie ces constructions et donne quelques propriétés des extensions obtenues.
Le second étudie les rapports avec le foncteur Ext et fournit, comme en 5.4.7. , une propriété d'injectivité partielle.

6.1. Boules unités et modules de fractions

6.1.1. Boule unité Si A est un R-module filtré, l'ensemble $A_1 = \{a \in A \mid v(a) \leqslant w(1)\}$ est un sous-groupe de A appelé boule unité de A. On définit la boule unité R_1 de R comme la boule unité du R-module R. Un élément de $A_1(R_1)$ est appelé entier de A(R). Un module entier est un module égal à sa boule unité.

6.1.2. Proposition (1) Si w(1) est idempotent, alors R_1 est un sous-anneau de R et A_1 un R-module.
(2) Si w(1) contient un n, $n_i \leqslant i$ pour tout i, alors w(1) est idempotent, tout module est $\{1\}$ -valué, les A_i et les A^i sont des R_1-modules.

Démonstration (1) si $w(r) \leqslant w(1)$, $w(a) \leqslant w(1)$ alors $w(ra) \leqslant w(1)^2 = w(1)$.
(2) w(1) est idempotent car $w(1)^2 \leqslant n.w(1) \leqslant w(1)$ et $w(1) \leqslant w(1)^2$ de toute façon.
De même, $v(a) = w(1).v(a)$ pour tout a.
Si $r_1 \in R_1$, $v(r_1 a) \leqslant w(r_1).v(a) \leqslant w(1).v(a) \leqslant v(a)$ ce qui établit que les A_i (et donc les A^i) sont des R_1-modules.
Remarquons que dans $T_o(C,A)$ les t_i sont des R_1-homomorphismes (cfr 4.3.2.)

6.1.3. Dans le cas où R est un champ valué non-archimédien réel, R est l'ensemble des $s^{-1}r_1$, $r_1 \in R_1$, $s \in R_1 \setminus \{0\}$, et si A est un vectoriel normé, A est l'ensemble des $s^{-1}a_1$, $a_1 \in A_1$.
Dans le cas général, il n'est pas toujours possible de reconstituer R ou A à partir de R_1 et A_1 ; nous désignerons par R'(S) (A'(S)) l'ensemble des éléments de R(A) de la forme $s^{-1}r_1$ $(s^{-1}a_1)$ avec $r_1 \in R_1$ $(a_1 \in A_1)$ et $s \in S$, S sous-monoïde formé d'éléments inversibles de R_1 tel que R soit S-valué.

6.1.4. Les valuations classiques réalisent toujours la propriété :
P : R est exhaustif et $\forall i \in I$, $\exists j \in I_0$ tel que $ji \leqslant w(1)$ qui est aussi satisfaite dans le cas simple (puisque chaque fois $w(1)$ est le neutre de I, que dans les cas classiques I est un groupe et dans le cas simple, $ij \not\leqslant 1$ pour tous i, j).
La deuxième partie de P est aussi satisfaite si $w(1)$ est minoré et si I satisfait à 5.1.2 P_2.

Proposition Si la catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ satisfait P et si S possède des éléments arbitrairement petits, alors $R'(S)= R$ et $A'(S)= A$ pour tout R-module A S-valué.

Démonstration : Il faut démontrer que pour tout r, $r = s^{-1}r_1$, $s \in S$, $r_1 \in R_1$; ou encore $sr \in R_1, w(sr)=w(s).w(r) \quad w(1)$.
R est exhaustif, donc il existe un $i \in w(r)$. Pour ce i, par l'hypothèse P, il existe un j tel que $ji \leqslant w(1)$. Puisque S a des éléments arbitrairement petits, R_j contient un s et $w(sr)=w(s)w(r) \leqslant j.i \leqslant w(1)$: cqfd. Même raisonnement pour A.
Les anneaux étudiés par Benz [1] s'ils sont commutatifs et si leur topologie n'est pas discrète réalisent cette condition : I est le monoïde multiplicatif des réels positifs et pour tout r, il existe un s inversible avec $w(r) = w(s)$ et $w(r's) = w(r').w(s)$ pour tout r' donc il y a des s arbitrairement petits.

6.1.5. Jusqu'à la fin de ce paragraphe nous supposons que R et I sont commutatifs, I unital, $w(1) = 1$. Nous allons former un opérateur, en gros réciproque de l'opérateur "boule unité" qui à un objet A d'une catégorie $\mathcal{M}(R,I)$ où R est entier, associe un objet $S^{-1}A$ de $\mathcal{M}(S^{-1}R,I)$.
En réalité, il n'est pas utile de supposer R entier. Nous supposons simplement que S contient 1, que ses éléments sont f-simplifiables, et que R est S-valué. Clairement, on peut admettre que S est une partie multiplicative.

6.1.6. Puisque R est sans S-torsion, $S^{-1}R$ est un anneau incluant R, sans S-torsion dans lequel les éléments de S sont inversibles et tout R-module A S-valué étant sans S-torsion puisque les éléments de S sont f-simplifiables, peut être plongé dans un $S^{-1}R$-module $S^{-1}A = A \otimes_R S^{-1}R$, sans S-torsion et S-divisible. Comme R-module, $S^{-1}R$ est un module plat et $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R = S^{-1}R$ (0.5.2.)

6.1.7. THEOREME 1. $S^{-1}R$ est une extension filtrée de R pour $w(s^{-1}r)=\{i \in I \mid w(r) \leqslant iw(s)\}$ et si A est S-valué, $S^{-1}A$ est une extension filtrée de A pour $v(s^{-1}a)=\{i \in I \mid v(a) \leqslant iw(s)\}$
2. $S^{-1}R$ est S-valué si et seulement si $w(s)$ est inversible pour tout s ; alors $S^{-1}A$ est S-valué.

Démonstration : 1. Voyons la par exemple pour A.
Si $s^{-1}a = t^{-1}b$, $v(a) \leqslant iw(s)$ entraîne $v(b) \leqslant iw(t)$ de sorte que la filtration ne dépend pas de s.

A_i est un sous-groupe additif car si $s^{-1}a, t^{-1}b \in (S^{-1}A)_i$, c'est-à-dire $v(a) \leq iw(s), v(b) \leq iw(t)$, alors
$v(ta-sb) \leq \sup(v(ta),v(sb)) = \sup\,(w(t).v(a),w(s).v(b))$
$\leq iw(s)w(t) = iw(st)$.
Si $w(t^{-1}r) \leq j$ et $v(s^{-1}a) \leq i$ alors
$v(ra) \leq w(r).v(a) \leq ij\ \ w(t).w(s) = ijw(ts)$. La restriction à A est bien le v initial : puisque $a = 1^{-1}a$ et $w(1) = 1$
2. Si $w(s)$ est inversible,
$w(s^{-1}tr) = w(s^{-1})w(tr) = w(t).w(s^{-1})w(r) = w(t).w(s^{-1}r)$.
Si $S^{-1}R$ est S-valué, $1 = w(1) = w(s).w(s^{-1})$ et $w(s)$ est inversible. $S^{-1}A$ est alors S-valué.

6.1.8. Divisé Soit A entier. $S^{-1}A$ est S-divisible. Sa boule unité $\mathrm{div}_S A$ est Sf-divisible (c'est-à-dire que si $a \in \mathrm{div}_S A$, $s \in S$ et $v(a) \leq w(s)$, alors a est divisible par s). Ce qui montre bien qu'en général $A \subsetneq \mathrm{div}_S A$. $\mathrm{div}_S A$ est une généralisation du divisé introduit par Lazard [21] . Nous disons que c'est le divisé pour S de A. C'est un $\mathrm{div}_S R$-module.
Un lien important entre A et $\mathrm{div}_S A$ est établi par le théorème suivant où nous supposons I filtrant à gauche

6.1.9. THEOREME (1) Si tout $iw(s)$ est minoré et si A est résiduellement Sf-divisible, alors A est dense dans $\mathrm{div}_S A$
(2) Si pour tout s, $\bigcup_{i \in I_0} iw(s) = I_0$ et si A est de filtration régulière, la condition est nécessaire.

Démonstration : En fait nous travaillons sur la proposition : $\hat{A}^i = (\mathrm{div}_S A)^i$ qui, si I est filtrant à gauche, est équivalente à la densité.
(1) Il faut que pour tous i, a, s, $v(a) \leq w(s)$, il existe un x_i tel que $s^{-1}a - x_i = s^{-1}(a - sx_i) \in (\mathrm{div}_S A)_i$ ou encore $v(a - sx_i) \leq iw(s)$. Cette condition est réalisée si pour tout j, il existe un x_j avec $a - sx_j \in A_j$. En projetant : $\bar{a} = s\bar{x}_j$ avec $v(\bar{a}) \leq v(a) \leq w(s)$ et puisque A^j est Sf-divisible, il existe toujours un tel x_j.
C'est le cas si $A = \mathbb{Z}$ avec une filtration p-adique.
(2) S'il existe un $\bar{a} \in A^j$, $v(\bar{a}) \leq w(s)$ et $\bar{a}$ non divisible par s, A^j étant un quotient régulier, il existe un a dans A avec $v(a) = v(\bar{a}) \leq w(s)$ et a n'est pas résiduellement divisible par s donc il n'existe pas de x_j tel que $a - sx_j \in A_j$. Pour i tel que $iw(s) \leq j$, $\hat{A}^i \neq (\mathrm{div}_S A)^i$.
Si I est totalement ordonné, A est toujours de filtration régulière.
Si $w(s)$ est un inversible de I, alors $iw(s)$ est minoré et $\bigcup_{i \in I_0} iw(s) = I_0$

6.1.10 Dans le cas simple, tout sous-monoïde contenant 1 et formé d'éléments simplifiables peut servir de S.
La filtration introduite au théorème 6.1.7. revient à prendre $(S^{-1}A)_i = A_i \otimes_R S^{-1}R$. Bien sûr, $S^{-1}A = \mathrm{div}_S A$.
Nous dirons qu'un R-module X possède la propriété P(S) si pour X' sous-module de X, $X' \otimes_R S^{-1}R = 0$ entraîne $X' = 0$.

6.1.11. Proposition Dans une catégorie simple, $S^{-1}A$ est une extension filtrée de A si et seulement si A est résiduellement P(S).

Démonstration : Un module est S-valué si et seulement si il est résiduellement sans S-torsion. Si A n'est pas S-valué, il existe un A^i, un $a^i \in A^i$ et un $s \in S$ tel que $sa^i = 0$.
Alors $\mathrm{mod}\{a^i\} \otimes_R S^{-1}R = 0$ car $S^{-1}R$ est S-divisible et A n'est pas résiduellement P(S).
Donc si A est résiduellement P(S), il est S-valué.
Réciproquement, si A est S-valué, A est résiduellement P(S).
Si T était un sous-module $\neq 0$ de A^i tel que $T \otimes_R S^{-1}R = 0$, T contiendrait un module cyclique $\mathrm{mod}\{a^i\}$ avec $\mathrm{mod}\{a^i\} \otimes_R S^{-1}R = 0$ (puisque $S^{-1}R$ est plat).
L'ordre U de a^i est tel que $U \cap S = \emptyset$.
Si $\mathrm{mod}\{a^i\} \otimes_R S^{-1}R = 0$, $U \otimes_R S^{-1}R = R \otimes_R S^{-1}R$ puisque la suite $0 \to U \otimes_R S^{-1}R \to R \otimes_R S^{-1}R \to \mathrm{mod}\{a^i\} \otimes_R S^{-1}R \to 0$ est exacte.
Mais c'est impossible parce que $U \otimes_R S^{-1}R = \{u \otimes s^{-1} \mid u \in U\}$ et que s par exemple ne peut être mis sous cette forme.
Par 6.1.7., il résulte que la condition est suffisante
Montrons qu'elle est nécessaire : si $sa^i = 0$, alors soit A'_i l'image réciproque de $\mathrm{mod}\{a^i\}$ dans A. $A'_i \supset A_i$; or de la suite exacte
$0 \to A_i \otimes_R S^{-1}R \to A'_i \otimes_R S^{-1}R \to \mathrm{mod}\{a^i\} \otimes_R S^{-1}R = 0$, on déduit que $(S^{-1}A)_i \cap A \supset A'_i$ donc $\neq A_i$ et $S^{-1}A$ n'est pas une extension.

6.1.12. Jusqu'à la fin du paragraphe, nous supposons que nous sommes dans une bonne situation topologique, c'est-à-dire que la catégorie réalise 5.P_1, 5.1.2.P_2, et que les filtrations envisagées sont séparées et exhaustives.
Nous écartons le cas où la topologie de R est discrète.
Dans ces conditions, $\mathrm{div}_S A$ est un R-module topologique et nous pouvons construire son complété $\mathrm{sat}_S A$ (saturé de A pour S) que Lazard [21] a également étudié.

6.1.13. Proposition Si $iw(s)$ est minorisé pour tout i et tout $s \in S$, et si $w(s)$ est inversible pour tout s (6.1.7.(2)) alors $sat_S A$ est Sf-divisible.

Démonstration : Il est équivalent de démontrer que si X est un module S-divisible et S-valué, son complété $\hat{X}$ est S-divisible :
soit $x_k \longrightarrow \hat{x}$, $x_k = sy_k$, y_k uniques. Pour tout i, il existe une infinité de k avec
$sy_k - sy_{k'} \in X_i$ donc $w(s).v(y_k - y_{k'}) \leq i$.
Pour $j \in I$, prenons $i \leq jw(s)$;
alors $v(y_k - y_{k'}) \leq i$ (s f-simplifiable) donc $y_k \longrightarrow \hat{y}$
et $\hat{x} = s\hat{y}$ par continuité.
Notons que si I est totalement ordonné, et si $S = R \setminus \{0\}$, $iw(r)$ est minoré car $w(r)$ est minoré par un certain j et $ij \neq 0$ puisque nous avons écarté le cas discret.
6.1.13; généralise un résultat de Lazard [21] .

6.1.14. La boule unité d'un module est étroitement liée à ce module et notamment $div_S A$ à $S^{-1}A$, $sat_S A$ à $(S^{-1}A)$
En particulier, $A = \oplus A_k \Leftrightarrow A_1 = \oplus (A_k)_1$

6.1.15. Proposition Si I est totalement ordonné, un champ valué R est $\mathcal{J}(I)$-compact $\Leftrightarrow R_1$ est $\mathcal{J}(I)$-compact.

Démonstration : La condition nécessaire est évidente. Supposons maintenant que R_1 est $\mathcal{J}(I)$-compact et soit $\{r_i + R_i\}$ une famille centrée de classes latérales. On peut évidemment se limiter à la sous-famille $\{r_i + R_i\}$, $i \leq i_o$. Prenons r de telle sorte que $w(r) \geq \max(i_o, w(r_{i_o}))$.
La famille $r_i r^{-1} + R_j$, $i \leq i_o$ et $1 \geq j \geq iw(r^{-1})$ est une famille centrée de classes latérales de R_1 donc possède une limite x. Alors xr est limite de la famille initiale.

6.1.16. Si R est un domaine d'intégrité et si $S = R \setminus \{0\}$, nous écrivons R^*, A^*, div A, sat A au lieu de $S^{-1}R$, $S^{-1}A$, $div_S A$, $sat_S A$.

THEOREME Si I est totalement ordonné, R un domaine d'intégrité valué tel que $w(r)$ est inversible pour $r \neq 0$ et sat R $\mathcal{J}(I)$-compact, A un R-module valué de rang au plus dénombrable tel que $v(a)$ soit inversible pour $a \neq 0$, alors sat A contient un sous-module dense $\oplus B_{1k}$ qui est filtré-libre régulier et sat $A = (b_{1k})$, $b_{1k} \longrightarrow 0$.

Démonstration : Le complété $\hat{R}^*$ de R^* est un champ $\mathcal{J}(I)$-compact puisque sat R est valué et $\mathcal{J}(I)$-compact (6.1.15.)

A étant de dimension au plus dénombrable,
$B = A^* \otimes_{R^*} \hat{R}^*$ est un $\hat{R}^*$ -vectoriel de dimension au plus dénombrable, intercalé entre A^* et un sous-groupe dense A^*, donc dense.
Pour tout $r^{-1}a \in A^*$, $v(r^{-1}a) = v(r)^{-1}.v(a)$ est inversible ; pour tout $\hat{a}^* \in \hat{A}^*$, $v(\hat{a}^*) = v(a^*)$ pour un certain a^* (5.1.11) donc est inversible. Mêmes remarques pour R^* et $\hat{R}^*$.
Les conditions du corollaire 4.3.13. sont donc remplies et B est filtré-libre *régulier*.
Le premier résultat vient alors de 6.1.14. et le second de 5.3.3.

<u>6.1.17.</u> Si A est un module de rang au plus dénombrable à valuation réelle sur un domaine valué discret R, alors les conditions du théorème sont remplies car sat R est complet et valué discret donc $\mathcal{J}(I)$-compact.
6.1.16. généralise donc également-mais avec une restriction sur la dimension -un résultat de Lazard.

<u>6.2. Rapports avec Ext</u>

<u>6.2.1.</u> Plaçons-nous d'abord dans les conditions de 6.1.2.(2) et dans la catégorie $\mathcal{M}(R_1, I)$.

<u>Proposition Si $w(1)$ est principal et X entier filtrant (1.2.2.) alors $\mathrm{Ext}(X, A) \simeq \mathrm{Ext}(X, A_1)$.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous partons de la suite exacte

$$\mathrm{Hom}(X, A^1) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X, A_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(X, A^1)$$

et nous démontrons que le premier et le dernier terme sont nuls.
Soit $w(1) = (n)$, $n \in I$.
Alors $A_1 = A_n$, $A^1_n = 0$ tandis que $X_n = X$ puisque X est entier, donc $\mathrm{Hom}(X, A^1) = 0$.
$\mathrm{Ext}^1(X, A^1) = 0$. En effet si $(f, u, t) \in T(X, A^1)$, pour tous $x, y \in X_n = X$.

$$f(x,y) + 3_n(X) + 3_n(y) - 3_n(x+y) \in A^1_n = 0$$

$$u(r_1, x) + r_1 3_n(x) - 3_n(r_1 x) \in A^1_n = 0$$

où $3_n(x) \longrightarrow t_n(x) \in A^{1n} \simeq A^1$ donc (f, u) est algébriquement équivalent à $(0,0)$
$\mathrm{Ext}_0(X, A^1) = 0$. $t_n \in \mathcal{H}om_{R_1}(X, A^1)$. Pour $i \leq n$, $t_i(x) = t_n(x)$.
Si $x \in X_j$, $\exists\, i \leq j, n$ tel que $x \in X_i$ (puisque $v(x)$ est filtrant à gauche) et $t_i(x) = t_n(x)$, $t_j(x) = t_n(x) + A^1_j$ et $T_0(X, A^1)$ est l'image de $\mathcal{H}om_{R_1}(X, A^1)$

6.2.2. Corollaire Si, en plus des hypothèses de 6.2.1., I est totalement ordonné, alors $Ext_r(X,A) \simeq Ext_r(X,A_1)$.

Démonstration Si I est totalement ordonné, $A_1 = A_n$ est totalement régulier (2.2.7.)
$Ext_r(X,A^1) = 0$ puisque $Ext(X,A^1) = 0$. Le corollaire résulte alors du corollaire 3.2.7.

6.2.3. On reprend les hypothèses de 6.1.9.
Si A est dense dans $div_S A$, $A^i = (div_S A)^i$.
On peut construire une application $\mathcal{U}$ de $\mathcal{H}om_{R_1}(X, div_S A)$ dans $Ext_o(X,A)$ en associant à l'homomorphisme h la classe de $(0,0,-h(x) + (div_S A)_i)$ où $-h(x) + (div_S A)_i$ est identifiée à son correspondant dans A^i.

Proposition Si tout iw(s) est minoré et si A est résiduellement Sf-divisible, alors les suites :

(1) $\mathcal{H}om(X, div_S A/_A) \longrightarrow Ext(X,A) \longrightarrow Ext(X, div_S A) \longrightarrow \mathcal{E}xt(X, div_S A/_A)$ et

(2) $0 \longrightarrow \mathcal{H}om(X,A) + Hom(X, div_S A) \xrightarrow{1} \mathcal{H}om(X, div_S A) \longrightarrow Ext_o(X,A)$
$\longrightarrow Ext_o(X, div_S A) \longrightarrow 0$ sont exactes.

Démonstration (1) En vertu de l'hypothèse, A est dense dans $div_S A$ (6.2.9.(1)) donc on peut reprendre la démonstration de la proposition 5.4.1.
(2) L'exactitude en $\mathcal{H}om(X,A) + Hom(X, div_S A)$ est évidente et celle en $Ext_o(X, div_S A)$ vient de $\bar{A} = div_S A$.
L'exactitude en $Ext_o(X,A)$ résulte du théorème 2.1.3.
Que $im\ 1 \subset ker\ \mathcal{U}$ résulte aussi de 2.1.3. Enfin, si h est un homomorphisme de X dans $div_S A$ dont l'image est la classe nulle, $(0,0,-h(x) + (div_S A)_i) = (0,0,-h(x) + A_i)$ où $x \in X_i$ et $h_1 \in \mathcal{H}om(X,A)$. Alors $h - h_1 \in Hom(X, div_S A)$. cqfd.

6.2.4. Nous allons maintenant démontrer un résultat du même type que 5.4.9. Supposons comme dans 6.1.7.(2), w(s) inversible, et considérons l'extension $S^{-1}A$ du module S-valué A.
Posons $A' = S^{-1}A/_A$. Un module L est dit d'ordre résiduel S si tous ses quotients ont au moins un élément d'ordre 0 ou engendré par S.

6.2.5. THEOREME Si X est à S-torsion et d'ordre résiduel S, alors $Ext(X,A) \simeq Hom(X,A')$.

Démonstration Dans la suite exacte
$Hom(X,S^{-1}A) \longrightarrow Hom(X,A') \longrightarrow Ext(X,A) \longrightarrow Ext(X,S^{-1}A)$,
$Hom(X,S^{-1}A) = 0$ puisque $S^{-1}A$ est sans S-torsion.

$Ext_o(X,S^{-1}A) = 0$ en vertu de la proposition 4.3.4. puisque $S^{-1}A$ est S-valué (6.1.7.(2))
Reste à prouver que $Ext(X,S^{-1}A) = Ext_o(X,S^{-1}A) = 0$; c'est une conséquence du

<u>6.2.6.</u> <u>Lemme</u> <u>$S^{-1}A$ est injectif au sens de $\mathcal{M}(R)$ pour les suites exactes $0 \to N \to M \to L \to 0$ où L est d'ordre résiduel S.</u>

<u>Démonstration</u> : $S^{-1}A$ est S-divisible et sans S-torsion.
Soit h un homomorphisme de N dans $S^{-1}A$. Parmi tous les prolongements possibles de h à un sous-module de M, il y en a un maximal h_1 de support $N_1 \subset M$. (Zorn). Supposons $M \neq N_1$. M/N_1 est un quotient de L, donc M contient un m dont l'ordre relativement à N_1 est $\{0\}$ ou un idéal O engendré par une partie T de S. Dans le premier cas, il existe évidemment un homomorphisme de $N_1 + \text{mod}\{m\}$ dans $S^{-1}A$ prolongeant h.
Dans le second, les éléments $\frac{h_1(tm)}{t}$ sont tous égaux à un a de $S^{-1}A$.
Alors $h_2 : N_1 + \text{mod}\{m\} : n_1 + rm \to h_1(n_1) + ra$ est un homomorphisme bien déterminé, ce qui contredit la maximalité de h_1 et $N_1 = M$.

<u>6.2.7.</u> <u>Remarque</u> Considérons une catégorie simple $(\mathbb{Z},I)$ et $S = Z\setminus\{0\}$. Un groupe X à torsion est d'ordre résiduel S. Si A est un groupe sans torsion, $S^{-1}A$ est sa clôture divisible. Si on munit X et A des filtrations de 3.1.4., 6.2.5. n'est rien d'autre qu'un théorème bien connu de la théorie des groupes : $\mathcal{E}xt(X,A) \simeq \mathcal{H}om(X,A')$ [12] .

CHAPITRE 7 : APPLICATIONS TOPOLOGIQUES.

Au chapitre 5, nous avons étudié des critères qui permettent de décider si un module filtré est un module topologique (5.1.2., 5.1.3.). Ici nous cherchons à étudier les modules topologiques comme modules filtrés et à leur appliquer les résultats des chapitres précédents.

7.1. Anneaux et modules filtrables

Nous cherchons dans ce paragraphe à découvrir quand un anneau topologique est filtrable, c'est-à-dire peut être muni d'une filtration dont la topologie est la topologie initiale (filtration compatible) et quand un module topologique sur un anneau I-filtré est un objet de $\mathcal{M}(R, I)$.

7;1.1. Soit R un anneau topologique dont la topologie est engendrée par ses sous-groupes ouverts R_i, $i \in I$.
R peut être muni de diverses filtrations compatibles par exemple en posant $ij = m$ avec $R_m = R$. Toutefois, une filtration n'est satisfaisante dans l'application des chapitres 1 à 4, que si son I satisfait à 5.1.2.P_2, car autrement on ne peut décider si une extension filtrée est topologique.

7.1.2. Si R = Z, toutes les filtrations possibles sont entières, les sous-groupes sont nécessairement des idéaux. C'est un exemple de la

7.1.3. Proposition <u>Pour qu'un anneau topologique commutatif puisse être muni d'une filtration compatible, entière, satis-faisant à SP_1, 5.1.2. P_2, et 6.1.2.(2), il faut et il suffit qu'il possède un système fondamental de voisinages de 0 constitué d'idéaux.</u>

Démonstration : Si R est muni d'une telle filtration, R_i est un R-module (6.1.2.) donc R_i est un idéal de R (A commutatif) et l'ensemble des R_i est le système de voisinages demandé puisque I est filtrant à gauche.
Réciproquement, on peut construire une filtration suivant le raisonnement plus général :

7.1.4. Si un anneau topologique possède un système fondamental de voisinages de 0 constitué d'idéaux bilatères, alors il peut être muni d'une filtration du type envisagé.

Considérons l'ensemble $O = \{R_i, i \in I\}$ des idéaux bilatères ouverts de R ; c'est un système fondamental de voisinages de 0; posons $ij = k$ avec $R_k = R_i \cap R_j$; $i \leqslant j \Leftrightarrow R_i \subset R_j$, $I, ., \leqslant$, est un monoïde commutatif ordonné, filtrant à gauche et à droite.
$R_i . R_j \subset R_{ij}$ (idéaux bilatères) ; tout i est tel que $ij \leqslant j$ pour tout j ce qui établit 6.1.2.(2) (et 5.1.1. P_3)
Pour tous i, j, il existe un k avec $R_i \cap R_k \subset R_j$, d'où le résultat.

7.1.5. Si R est discret, nous sommes dans la situation de 7.1.4. En fait, si I est un ensemble ordonné, on peut lui ajouter 0 et 1, respectivement minimum et maximum, et munir R de la filtration $R_1 = R$, $R_1 = 0$ pour $i \neq 1$. Un anneau discret est donc I-filtrable pour tout I dans une catégorie simple.

7.1.6. Si R est un anneau filtré satisfaisant à 6.1.2.(2), R_1 son anneau des entiers, parmi les modules topologiques filtrables, on trouve ceux dont la topologie est engendrée par la filtration $A_i = \mathrm{mod}\{R_i\ A_1\}$, A_1 sous-R_1-module de A ouvert. Nous appelons cette filtration la filtration (R_i, A_1)-adique de A. Si A est un R-module I-filtré, A_1 sa boule unité, alors $\mathrm{mod}\{R_i\ A_1\} \subset A_i$. de sorte que la topologie de A est moins fine que la topologie (R_i, A_1)-adique de A.

7.1.7. THEOREME Si R est un anneau filtré satisfaisant à 6.1.2.(2) dans lequel il y a des éléments inversibles arbitrairement petits -par exemple un champ valué non archimédien- alors les modules de $\mathcal{B}(R,I)$ sont les modules dont la topologie est moins fine qu'une topologie (R_i, A_1)-adique.

Démonstration : La condition est nécessaire (7.1.6.)
Réciproquement, s'il existe un sous-R_1-module ouvert A_1 de A tel que tout sous-groupe ouvert A' contienne un $\mathrm{mod}\{R_i\ A_1\}$, nous allons démontrer que les $\mathrm{mod}\{R_i\ A_1\}$ sont ouverts.
Si r est inversible et appartient à R_i, $rA_1 \subset \mathrm{mod}\{R_i\ A_1\}$ et est ouvert puisque A_1 est ouvert et que r. est la réciproque de l'application continue r^{-1}. La topologie initiale est donc la topologie (R_i, A_1)-adique et A est donc filtrable.
Les anneaux de Benz [1] satisfont aussi aux conditions du théorème.

<u>7.1.8. Proposition Supposons R discret. Alors un module est linéairement topologisé (0.3.2.) si et seulement si il est muni d'une filtration entière satisfaisant à 6.1.2.(2). Le module est alors filtrable dans une catégorie simple.</u>

<u>Démonstration</u> : Si A est muni d'une filtration entière satisfaisant à 6.1.2.(2), les A_i qui engendrent la topologie sont des sous-modules et A est linéairement topologisé. Réciproquement, si les A_i, $i \in I$, sont des sous-modules qui forment un système fondamental de voisinages de 0, on peut construire sur R la filtration de 7.1.5. et A devient un objet de la catégorie simple $\mathcal{M}(R,I)$. Sa filtration satisfait donc à 6.1.2.(2), 5.1.2.P_2 ainsi qu'à 5 P_1 puisque I est filtrant à gauche.

7.2. Groupes d'extensions topologiques

<u>7.2.1.</u> Soit R un anneau topologique dont la topologie est la topologie associée à une I-filtration, A et C deux R-modules I-filtrés. Nous ne prenons en considération que les I qui sont filtrants à gauche et à droite, satisfont à P_2 de 5.1.2.; nous supposons 6.1.2.(2) et R, A, C exhaustifs. On vérifie sans peine que ces conditions sont réalisées -ou que l'on peut les supposer réalisées sans restriction- dans les cas particuliers de 7.1.2. à 7.1.5. et de 7.1.8 ainsi que dans les cas classiques.
Toute extension de A par C est exhaustive (2.5.7.), donc toute extension filtrée de A par C est un R-module topologique (5.1.3.)
"Filtrable" s'entend ici : "qui peut être muni d'une filtration compatible réalisant les conditions ci-dessus".

<u>7.2.2.</u> Naturellement, les extensions de A par C doivent être classées par la relation d'équivalence topologique : il existe un schéma commutatif :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & B \arrow[dd, "h"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\ & & B' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

où h est un isomorphisme de R-modules topologiques

7.2.3. Lemme : Pour que deux triples (f, u, t) et (f', u', t') définissent des extensions topologiquement équivalentes de A par C, il faut et il suffit qu'il existe une fonction z de C dans A, nulle en 0, que $(f,u) = z$ (3.2.4.), $t_i(c) - t'_i(c) = -z(c) + A_i$ pour $c \in C_{k(i)}$, $k(i) \leq i$.

Démonstration : L'équivalence topologique entraîne l'équivalence algébrique, donc une condition nécessaire est l'existence d'une fonction z avec $(f, u) = \tilde{z}$.
h est alors l'application de B sur B' définie par $(c,a) \longrightarrow (c, a + z(c))$

Il faut et il suffit dès lors que pour tout i, il y aît un j et un k, $j \leq i$, $k \leq i$ tels que $B'_j \subset h(B_i)$ donc $t'_j(c) \longrightarrow t_i(c) + z(c) + A_i$ ou encore $t'_i(c) = t_i(c) + z(c) + A_i \, (c \in C_j)$

$h(B_k) \subset B'_i$ donc $t_k(c) + z(c) + A_k \longrightarrow t'_i(c)$
ou encore $t_i(c) + z(c) + A_i = t'_j(c)$ $(c \in C_h)$ (CQFD)

Le noyau est formé des triples $(f,u) = \tilde{z}$ et $t_i(c)$ localement égal à $-z(c) + A_i$ (égal sur un ouvert)

7.2.4. Proposition L'ensemble $Ext_t(C,A)$ des extensions filtrées de A par C, classé suivant 7.2.2. peut être muni d'une loi de groupe et $Ext_t(C,A) \simeq Ext(C,A)/Ext'_o(C,A)$ où $Ext'_o(C,A)$ est le sous-groupe de $Ext_o(C,A)$ des classes des éléments localement nuls de $T_o(C,A)$.

Démonstration : L'équivalence topologique est compatible avec l'addition des triples, donc $Ext_t(C,A)$ est un groupe. C'est bien un quotient de $Ext(C,A)$ et le noyau est dans $Ext_o(C,A)$. Si la classe de (t_i) appartient au noyau, $t_i(c) = -z(c) + A_i$ sur un voisinage ouvert de C_i et z est linéaire, $t_i + z$ est équivalent (au sens de la filtration) à (t_i) et localement nul. Réciproque évidente.

7.2.5. Du point de vue topologique, la fixation des filtrations de R, C, A, n'a pas de sens ; aussi doit-on faire varier ces filtrations pour obtenir toutes les extensions filtrables de A par C. Chaque choix des filtrations donne naissance à un groupe $Ext_t(C,A)$.

<u>THEOREME</u> <u>L'ensemble $ET(C,A)$ des extensions filtrables du module filtrable A par le module filtrable C, classées suivant 7.2.2. peut être muni d'une loi de groupe qui en fait une limite inductive des groupes $Ext_t(C,A)$</u>.

<u>Démonstration</u> : Si nous considérons les $Ext_t(C,A)$ comme ensembles d'extensions topologiques de A par C, il est clair que $ET(C,A) = \varinjlim Ext_t(C,A)$.
Nous dirons que $Ext^1_t(C,A)$ pour R I-filtré et C, A objets de $\mathcal{M}(R,I)$ est couvert par $Ext^2_t(C,A)$ pour R K-filtré et $C, A \in \mathcal{M}(R,K)$ s'il existe un épimorphisme croissant s de $J, ., \leq$ sur $I, ., \leq$ et si, pour tout j, $R_j \subset R_{s(j)}$, $C_j \subset C_{s(j)}$, $A_{s(j)} \subset A_j$. Dans ce cas nous pouvons construire un homomorphisme h de $Ext^1_t(C,A)$ dans $Ext^2_t(C,A)$ qui respecte l'équivalence topologique (donc injectif :
si $B \in Ext^1_t(C,A)$ est défini par (f, u, t), $h(B)$ est défini par (f, u, t') où $t'_j : C_j \longrightarrow A^j$ est la projection dans A^j de $t_{s(j)}$. On vérifie d'une façon routinière que c'est un homomorphisme.
B et $h(B)$ sont topologiquement équivalents : pour tout $i \in I$ prenons $j \in J$ de telle sorte que $s(j) \leq i$ et $A_j \subset A_i$ ce qui est possible puisque I est filtrant à gauche, alors $h(B)_j \subset B_i$.
De même, pour $j \in J$, prenons $k \in I$ avec $C_k \subset C_j$ et $k \leq s(j)$, alors $B_k \subset h(B)_j$.
Deux groupes $Ext^1_t(C,A)$ et $Ext^2_t(C,A)$ peuvent être plongés dans un même troisième $Ext^3_t(C,A)$:
il suffit de considérer le produit de monoïdes ordonnés $I \times J, ., \leq$ et de poser $R_{i,j} = R_i \cap R_j$
$A_{i,j} = A_i + A_j$, $C_{i,j} = C_i \cap C_j$ qui sont encore compatibles.
s est alors la section de $I \times J$ sur I.
On peut donc construire le groupe $\varinjlim Ext_t(C,A)$.
Tous les éléments identifiés (0.2.1.) appartenant à une famille sont équivalents donc définissent la même extension ; réciproquement, si deux éléments appartenant à des groupes distincts sont équivalents, ces groupes peuvent être plongés dans un troisième dans lequel ils seront identifiés. CQFD.

<u>7.2.6.</u> Si <u>R est discret</u>, nous savons que les modules <u>linéairement topologisés</u> sont filtrables (7.1.8.).
Les opérations du théorème étant fermées pour les filtrations introduites en 7.1.8., on peut construire le groupe des extensions linéairement topologisées de A par C en se limitant à ces filtrations.

7.2.7. Remarque Si on s'intéresse seulement aux R-modules I-filtrés pour une I-filtration donnée de R, on peut effectuer une démarche analogue à celle du théorème en construisant les I-filtrations
$A''_i = A_i + A'_i$, $C'_i = C_i \cap C'_i$ (les A_i, A'_i... étant des I-filtrations compatibles) et en couvrant ainsi deux groupes $Ext_t(C,A)$ par un troisième tout en restant dans les I-filtrations.

7.2.8. Corollaire La suite :
$0 \to \varinjlim Ext_0^!(C,A) \to \varinjlim Ext(C,A) \to ET(C,A) \to 0$ est exacte.

(les limites des $Ext_0^!$ et des Ext sont prises parallèlement à la limite des Ext_t.)
Ce corollaire résulte du théorème, de la proposition 7.2.4. et de l'exactitude de $\varinjlim$ (0.2.2.)

7.2.9. Cas particuliers du corollaire
Pour que le terme $\varinjlim Ext_0^!(C,A)$ ne soit pas gênant, il faut que $Ext_0^!(C,A) = 0$ pour toute filtration compatible (alors $ET(C,A) \simeq \varinjlim Ext(C,A)$ ou encore que $Ext_0^!(C,A) = Ext_0(C,A)$ pour toute filtration compatible ($ET(C,A) \simeq \varinjlim \mathcal{E}xt^I(C,A)$.
Dans ce dernier cas, si $\mathcal{E}xt(C,A) = 0$, $ET(C,A) = 0$

7.2.10. Le cas le plus simple est celui où $Ext_0(C,A) = 0$ pour toute filtration (4.3.)
Par exemple, si $R = Z$, C p-groupe, A résiduellement q-groupe pour une filtration compatible, alors pour toute filtration compatible, C_i est un p-groupe, A^i un q-groupe et $Ext_0(C,A) = 0$.

7.2.11. Proposition Si pour tout C', sous-groupe d'un quotient discret de C et A' quotient discret de A, $\mathcal{H}om_Z(C', A') = 0$, alors $Ext_0^!(C,A) = 0$ pour toute filtration compatible.

Démonstration : Soient C_i, A_i des filtrations compatibles de C et A. Si (t_i) définit un élément de $Ext_0^!(C,A)$, (t_i) est nul sur un certain ouvert donc sur $C_k \subset C_i$. Or C_i/C_k est un sous-groupe de C^k et $\mathcal{H}om_Z(C_i/C_k, A^i) = 0$.
Cela implique que l'application de $\mathcal{H}om_Z(C_i,A^i)$ dans $\mathcal{H}om_Z(C_k,A^i)$ est injective, donc l'unique prolongement de la fonction 0 de C_k dans A^i est 0 et $t_i = 0$.

<u>7.2.12. Proposition Si pour tout C", sous-groupe ouvert d'un sous-groupe ouvert C' de C et tout A' quotient discret de A, $\mathcal{H}om_Z(C'',A') = 0$, alors $Ext_0^!(C,A) = Ext_0(C,A)$ pour toute filtration compatible.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit, pour des filtrations compatibles de C et A, $(t_i) \in T_0(C,A)$; t_i est défini sur C_i et nul sur $C_i \cap C'$ car $C_i \cap C'$ est un sous-groupe ouvert de C' et $\mathcal{H}om_Z(C_i \cap C', A^i) = 0$, donc t_i définit un élément de $Ext_0^!(C,A)$.

<u>7.2.13. Exemples</u> :
Pour 7.2.11. : C groupe sans torsion avec tous ses quotients discrets qui sont des p-groupes tandis que A a tous ses quotients discrets qui sont des q-groupes.
Pour 7.2.12. : C contient un ouvert p-groupe, A a tous ses quotients discrets qui sont des q-groupes (p et q premiers non associés).

<u>7.2.14.</u> S'il s'agit de R-modules linéairement topologisés (7.2.6.), on peut substituer R à Z dans les propositions 7.2.11. et 7.2.12. puisque les C_i et les A_i peuvent toujours être choisis parmi les R-modules.

<u>7.3. Extensions topologiques régulières.</u>

<u>7.3.1. Définition</u>
Une extension topologique de A par C est dite <u>régulière</u> si et seulement si elle est une extension régulière pour un système de filtrations compatibles de R, A, C.

<u>7.3.2.</u> L'ensemble <u>$ET_r(C,A)$</u> des extensions régulières de A par C, classées suivant 7.2.2. <u>est un sous-groupe de ET(C,A)</u> (tout élément de $ET_r(C,A)$ peut être représenté par un triple (f, u, o) pour une certaine filtration de R, A, C ; l'image de ce triple pour toute filtration qui couvre la première est encore (f, u, o) (7.2.5.); ainsi, pour deux extensions régulières, il existe une filtration de R, A, C pour laquelle ces extensions peuvent être représentées par des triples du type (f, u, o), d'où le résultat. L'équivalent de 7.2.8. est immédiat.

Exemples d'extensions topologiques régulières

7.3.3. Si R est discret et si B est une extension (algébrique) de A par C, de couple (f, u), (f, u) définit sur B une topologie linéaire en prenant comme système fondamental de voisinages de 0 les ensembles $B' = (C', A')$ où A' est un sous-module ouvert de A, C' un sous-module ouvert de C, chaque fois que B' est lui-même un sous-module de B ($f(C' \times C') \subset A'$, $u(r,C') \subset A'$)

B, muni de cette topologie est noté $B_{f,u}$

$B_{f,u}$ n'est pas nécessairement une extension topologique de A par C (topologies induites moins fines).

7.3.4. Proposition Si R est discret, une extension est régulière dans une catégorie simple dont le I est filtrant à gauche si et seulement si elle est de la forme $B_{f,u}$.

Démonstration : Si les B_i forment une filtration régulière et simple de B, ce sont des sous-modules, ouverts dans $B_{f,u}$. D'autre part, si B' est ouvert dans $B_{f,u}$, C' et A' sont ouverts (notations de 7.3.3.) donc il existe un $k \in I$ avec $C' \supset C_k$, $A' \supset A_k$ et $B' \supset B_k$.
Réciproquement, si une extension est de la forme $B_{f,u}$, l'ensemble des B', ordonné par C, est filtrant à gauche et définit une filtration simple pour laquelle B est une extension régulière de A par C.

7.3.5. Toujours dans le cas où R est discret, si A est linéairement compact, toute extension qui possède un système fondamental de voisinages de 0 totalement ordonné et formé de sous-modules est régulière (2.4.3., 2.4.9.).

7.3.6. Proposition Si e est un opérateur croissant de $\mathcal{J}(I), \leq$ tel que
(1) l'image de tout idéal $K \neq I_0$ est telle que $K \subset K_1 \subset e(K)$ où K_1 est principal
(2) e est un opérateur inversible de I
(3) $i\, e^{-1}(j) \leq e^{-1}(ij)$
alors toute extension I-filtrable séparée est une extension topologique régulière.

Démonstration : Si B est une extension I-filtrée de A par C, on peut décrire B par un système de représentants b(c) tel que $v(b(c)) \leq e\, v(c)$ puisque $ev(c) \geq$ à un idéal principal $\geq v(c)$.

Changeons la filtration de C en posant $C'_i = C_{e^{-1}(i)}$.
C'est encore une filtration de C (condition 3).
Pour elle, le couple (f, u) correspondant à b(c) est équilibré et on peut donc construire l'extension régulière correspondante de triple (f, u, o).
Cette extension est topologiquement équivalente à l'extension donnée :
$B'_i = (C'_i, A_i) \subset B_i$; $B_{e^{-1}(i)} \subset B'_i$

7.3.7. Corollaire Si un monoïde ordonné I unital contient un élément inversible > 1 et que tout idéal de $I \neq I_0$ est, soit principal, soit différence d'un idéal principal et de son générateur, alors toute extension I-filtrable est régulière.

Démonstration : A tout idéal $K \neq I_0$ on peut associer l'élément k = inf K. On pose alors $e(K) = ik$ où i est inversible et > 1 de sorte que $ik > k \in K$.
La réunion d'un groupe totalement ordonné qui est un treillis complet et d'un minimum absorbant (réels positifs par exemples), réalise les conditions du corollaire.

BIBLIOGRAPHIE

N.B. Une astérisque précède les références dont les résultats sont effectivement utilisés dans le texte, les autres étant données à titre d'illustration.

[1] Benz, H., Uber eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedendung für die Arithmetik, Schriftenreihe Inst. Math. Deusch. Akad. Wis., Akad-Verlag, Berlin (1961)

* [2] Bourbaki, Algèbre, ch.2 : Algèbre linéaire, fasc.6, 3ème éd., (1962)

* [3] " Topologie générale, ch.3 : Groupes topologiques, fasc.3, 3ème éd. (1960)

* [4] " Algèbre commutative, ch.1, modules, et 2, localisation, fasc.27 (1961)

[5] " Algèbre commutative, ch.3, graduations, filtrations, topologies, fasc.28 (1961)

[6] Boyer, D.L., On the theory of p-basic subgroups of abelian groups, Topics in abelian groups (1963) p.323-330

* [7] Cartan, Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ.Press (1956)

[8] Charles, Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens, Proc. Coll. on Abelian groups, Tihany (1963), Akad.Kiado, Budapest, (1964) p.29-42

[9] Coffi-Nketsia, J-B, Valuation des anneaux à diviseurs de zéro au moyen de groupes totalement ordonnés... C.R. Acad.Sci. Paris 254 (1962) p.2503-2505

[10] Fleischer, I., Maximality and ultra-completeness in normed modules, Proc.A.M.S.9, 151-157, (1958)

[11] Fuchs, L., Generalization of valuation theory, Duke M.J., 18, (1951) p.19-26

* [12] " Abelian groups, Hung.Ac. of Sciences, (1958)

* [13] " Notes on abelian groups II, Acta Math. Ac.Sci.Hung.11 (1960) p.117-125

[14] Gelfand, I.M., Raikov, D.A., Silow, G.E. Commutative normed rings, (Uspehi Mat.Nauk (N.S) 1, n° 2 (12) (1940), p.48-146) ; A.M.S.Translations, ser.2, vol.5 (1957) p.115-220)

[15] Haimo, F. Preservation of divisibility in quotient groups, Duke M.J., 15 (1948) p.347-356

* [16] Harrison, D.K, Irwin, J.M., Peercy, C.L., Walker, E.A., High Extensions of abelian groups, Acta Math.Ac.Sci.Hung.14 (1963) p.319-330

* [17] Hilton P.J., Yahya, S.M., Unique divisibility in abelian groups, Acta Math.Ac.Sci. Hung. 14 (1963) p.229-239

[18] Hion, N.Ya, Rings normed by the aid of semi-groups, (en russe), Izv.Ak.Nauk.SSSR, Ser. math.21 (1957) p.311-328

[19] Kaplansky, I., Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans.A.M.S.72 (1952) p.327-340

[20] Krasner, M. Espaces ultramétriques et valuations, séminaire Châtelet-Dubreil, Alg. et théorie des nombres, exposé 1 (1947-1948)

[21] Lazard, M., Groupes analytiques p-adiques, Publ.IHES n°26 (1965)

* [22] Lefschetz, S. Algebraic topology, A.M.S.coll.publ. n°27 (1942)

[23] Lemaire, C., Sur le complété d'un anneau-module topologique, Bull. Cl. des sc., Ac. royale de Belgique , 5ème sér., 52 (1966) p.390-394

[24] Lyapin, E. On the decomposition of abelian groups into direct sums of rational groups (Math.Sbornik (N.S) 8 (50) (1940) p.205-237) AMS translations n°7 (1950)

* [25] Maranda, J-M, On pure subgroups of abelian groups, Arch.Math.,11, (1960) p.1-13

[26] Monna, A.F., Springer, T.A., Sur la structure des espaces de Banach non-archimédiens, Proc.Kon.Ned.Akad.Wet. 68 A (1965) p.602-614

[27] Serre, J-P., Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, Publ.Math. IHES n° 12 (1962)

[28] Yakabe, I., On semi-valuations, Memoirs, Fac.Sc. Kyushu Univ. ser.A I, 16, (1962) p.1-8, II, 17, (1963) p.10-28

* [29] Yoneda, N. On Ext and exact sequences, Journ. Fac.Sc. Univ.Tokio, 8 (1960) p.507-576

* [30] Zelinsky, D. Linearly compact modules and rings, Amer. J. of Math. 75 (1953) p.79-90