UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

SEMI - QUADRIQUES
et
SOUS-ENSEMBLES des ESPACES PROJECTIFS.

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences
(grade légal)

Christiane LEFEVRE

Juin 1976

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

SEMI - QUADRIQUES
et
SOUS-ENSEMBLES des ESPACES PROJECTIFS.

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences mathématiques
(grade légal)

Christiane LEFEVRE

Juin 1976

A Nick ,

Que Monsieur le Professeur Buekenhout trouve ici le témoignage de ma profonde estime et l'expression de toute ma reconnaissance pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer. C'est à lui que je dois la découverte du monde vivant et passionnant de la recherche mathématique.

Je remercie tous les membres du service au sein duquel j'ai travaillé, pour l'esprit d'équipe qu'ils y font régner et qui stimule si bien la production personnelle.

Je voudrais aussi exprimer mon admiration pour Monsieur le Professeur Libois qui a fait naître en moi le goût de la géométrie et a imprégné de sa personnalité une équipe de chercheurs.

C'est au Fonds National de la Recherche Scientifique que je dois le support financier qui m'a permis de poursuivre mon travail, en une période si difficile pour tant de scientifiques.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

"L'essence des mathématiques réside dans leur liberté". Cantor.

Les quadriques projectives sont au centre de nombreuses recherches actuelles; notre travail contribue à leur caractérisation, par l'étude de classes de sous-ensembles des espaces projectifs, qui les généralisent.

Dans la littérature contemporaine, le sens attribué au mot quadrique ne fait pas l'unanimité des auteurs. Cette ambiguïté découle du développement récent de multiples concepts élargissant la notion classique.

Apparues déjà dans l'antiquité, les quadriques sont associées, au 18e siècle, à l'étude des formes quadratiques [1]. Vers le milieu du 19e siècle, elles donnent naissance au concept de *polarité*, lié à celui de forme bilinéaire. Tandis qu'au début de ce siècle se développent les géométries sur les corps quelconques, cette dernière notion conduit à celle de forme sesquilinéaire, dont sont issues les quadriques orthogonales, hermitiennes et symplectiques des espaces projectifs arguésiens. Cette nouvelle classe d'êtres généralise les quadriques connues précédemment, à l'exception toutefois de celles définies par une forme quadratique sur un corps de caractéristique 2. Une uniformisation parfaite de ces diverses notions est obtenue par TITS [44], par la définition de formes pseudo-quadratiques. Les structures géométriques ainsi obtenues sont appelées, par BUEKENHOUT [8], *semi-quadriques*. Ce sont celles-ci que nous étudions, principalement dans les espaces projectifs finis.

L'intérêt des semi-quadriques réside dans leur lien profond avec la théorie des groupes. Certaines classes de groupes simples (groupes orthogonaux, unitaires et symplectiques) sont représentés naturellement comme groupes d'automorphismes de semi-quadriques (voir par exemple DIEUDONNE [18], TITS [43]). De plus, c'est en théorie des groupes que l'étude des semi-quadriques trouve ses applications les plus fécondes; citons notamment les résultats relatifs aux groupes de permutations de rang 3 de HIGMAN-Mc LAUGHLIN [20], HIGMAN [19], BUEKENHOUT-HUBAUT [10], KANTOR [22].

---

1) Pour des détails sur ce bref historique, nous renvoyons, par exemple, le lecteur à [6].

L'importance des automorphismes des semi-quadriques explique, pour une large part, l'intérêt porté aux caractérisations de leur structure. Les nombreux travaux relatifs à la question (voir par exemple [8]) peuvent se répartir en deux courants de recherches : la caractérisation des semi-quadriques en tant que sous-ensembles des espaces projectifs d'une part, leur étude intrinsèque d'autre part. Quoique notre mémoire se rattache au premier de ces courants, nous allons rappeler deux approches intrinsèques [1)] des quadriques qui ont influencé notre travail.

Une première axiomatisation des semi-quadriques conduit à la notion d'espace polaire, due à VELDKAMP [45] et TITS [44] ; ces auteurs montrent que tout espace polaire qui n'est pas un quadrilatère généralisé, est une semi-quadrique, à quelques exceptions près qu'ils ont pu déterminer. La classification des quadrilatères généralisés est, quant à elle, sans espoir, ceux-ci étant en quelque sorte aux espaces polaires ce que les plans projectifs sont aux espaces projectifs de dimension quelconque. Par ailleurs, la notion d'espace de Shult introduite par BUEKENHOUT-SHULT [13] fournit une axiomatique équivalente, mais beaucoup plus simple, des espaces polaires. Cette notion, qui a une influence considérable sur notre travail, est née de l'étude de la structure d'incidence constituée des points et droites totalement isotropes des semi-quadriques : un *espace de Shult* Q est une structure d'incidence $(\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{L}(Q)$ et tout $a \in \mathcal{P}(Q)$ non incident à A, le point a est adjacent exactement à un ou à tous les points de A, deux points étant dits adjacents s'ils sont incidents à une même droite de $\mathcal{L}(Q)$. Cette condition, que nous appelons axiome de Shult, est à la base du chapitre 2 de ce mémoire.

Examinons maintenant le sujet proprement dit de notre travail : la caractérisation des semi-quadriques comme sous-ensembles des espaces projectifs (le plus souvent finis). Cette question trouve son origine dans l'article de SEGRE [29], montrant que les arcs maximaux d'un plan arguésien fini d'ordre impair sont les coniques non dégénérées, ainsi que dans les travaux de TITS [42] relatifs aux ovoïdes. Les recherches se sont alors développées dans deux directions, qui se retrouvent respectivement aux chapitres 2 et 3 de notre

1) Pour d'autres approches intrinsèques, voir [8].

travail : l'une exige l'existence d'un hyperplan tangent en chaque point de l'ensemble considéré; l'autre impose des restrictions sur le cardinal des intersections de l'ensemble avec les droites de l'espace.

Dans la lignée des travaux de Tits utilisant la notion d'hyperplan tangent, s'inscrivent les résultats de BARLOTTI [5] et BUEKENHOUT [7], ainsi que ceux que nous avons obtenus en collaboration avec BUEKENHOUT dans [12]. Nous y obtenons une caractérisation des semi-quadriques par l'étude des *ensembles semi-quadratiques*, qui contiennent une droite ou qui sont invariants par certaines perspectivités. De plus, nous montrons que, dans les espaces projectifs de dimension finie, la notion d'ensemble semi-quadratique contenant une droite coïncide avec celle d'espace de Shult projectif, inspirée du concept intrinsèque d'espace de Shult [13] rappelé plus haut. Un *espace de Shult projectif* d'un espace projectif P est une structure d'incidence $Q = (\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ satisfaisant à l'axiome de Shult, où $\mathcal{P}(Q)$ est un ensemble de points de P et $\mathcal{L}(Q)$ un ensemble de droites de P toutes contenues dans $\mathcal{P}(Q)$, l'incidence étant la relation d'appartenance dans P. Soulignons l'importance de la définition de Q comme paire de points et droites de P; elle est en effet indispensable pour la caractérisation des quadriques symplectiques dont la structure totalement isotrope n'est pas déterminée par son ensemble de points.

Le chapitre 2 de notre travail étudie un concept plus général, celui d'espace de Shult faiblement projectif, dont des exemples sont fournis par les semi-quadriques des sous-espaces projectifs [1)] de P. Un *espace de Shult faiblement projectif* de P est un espace de Shult $Q = (\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ dont les points et droites sont des points et droites de P, ces dernières n'étant pas nécessairement contenues dans $\mathcal{P}(Q)$, l'incidence étant l'appartenance dans P, et qui satisfait à quelques conditions naturelles (nécessairement vérifiées dans le cas d'espace de Shult projectifs). Nous appliquons les résultats relatifs à ces ensembles au chapitre 3 de ce travail, montrant ainsi l'intérêt que présente leur étude pour le deuxième type de caractérisations des semi-quadriques mentionné précédemment.

---

1) Le terme sous-espace projectif est employé ici pour désigner une sous-structure d'incidence de P qui est elle-même un espace projectif, c'est-à-dire un espace projectif construit sur un sous-corps du corps de base de P, pour un choix convenable de coordonnées.

L'étude des espaces de Shult faiblement projectifs de P nous conduit à conjecturer que, si P est fini, ceux-ci sont des espaces de Shult projectifs dans un sous-espace projectif de P et sont donc, d'après [12], des semi-quadriques de ce sous-espace. Notre principal résultat est de montrer qu'il en est bien ainsi lorsque P est fini et de dimension 3, en construisant à partir de l'espace de Shult, un sous-espace projectif de P. Cette construction utilise des caractérisations des plans affins et projectifs finis; on ne peut donc espérer la généraliser aux espaces infinis. Par contre, il semble fort probable qu'elle puisse s'étendre aux espaces projectifs finis de dimension quelconque : dans ce cas encore, nous pouvons construire, à partir de l'espace de Shult considéré, un ensemble de points susceptible d'être un sous-espace projectif de P.

Nous terminons le chapitre 2 par l'étude des espaces de Shult projectifs, en reprenant des résultats obtenus en collaboration avec BUEKENHOUT dans [11] et [12]. Une synthèse de ces deux articles dégage les lignes directrices de la démonstration prouvant que les espaces de Shult projectifs de P sont essentiellement les semi-quadriques et permet de montrer que, par quelques modifications des démonstrations, une hypothèse exigée, dans [12], dans le cadre des ensembles semi-quadratiques est superflue pour l'étude des espaces de Shult projectifs.

Le chapitre 3 de notre travail se rattache au deuxième courant de recherches évoqué plus haut : l'étude des sous-ensembles des espaces projectifs par des restrictions sur le cardinal de leurs intersections avec les droites de l'espace. Remarquons qu'une telle étude ne peut conduire, sans autre condition, à la caractérisation des quadriques symplectiques, leurs droites totalement isotropes ne pouvant être distinguées, de cette façon, des autres droites. Le sujet a donné lieu à un très grand nombre de publications, relatives toutes aux sous-ensembles des espaces projectifs finis. Cette exclusivité des recherches pour les espaces finis s'explique par le fait que les données mêmes de la question conduisent naturellement à des raisonnements de type arithmétique. Nous nous sommes efforcé de traiter le problème de façon aussi géométrique que possible, ce qui nous a permis d'obtenir quelques résultats valables dans les espaces projectifs infinis : la réduction (selon des méthodes classiques) des ensembles dégénérés, l'étude des ensembles de classe (0, 1, q, q+1) et celle des ensembles de Tallini dont nous parlons ci-après. Toutefois, nos principaux résultats sont relatifs aux espaces projectifs finis.

Le chapitre 3 est consacré aux sous-ensembles des espaces projectifs finis $P_d(q)$, rencontrés par toute droite en 0, 1, n ou q+1 points, avec $2 \leq n \leq q$. De tels ensembles sont appelés, par G. TALLINI [34], *ensembles de classe (0, 1, n, q+1)*. Leur étude n'a été entreprise jusqu'ici, que pour diverses familles restreintes d'entre eux. Citons, tout d'abord, les ensembles de classe (0, 1, n), ou arcs et calottes, qui font l'objet de nombreux articles repris, pour la plupart, dans [4] et [31] ; les ensembles de classe (0, 1, 2, q+1) sont étudiés par G. TALLINI [32], [33] ; plus récemment, M. TALLINI-SCAFATI [35], [36] détermine les ensembles de classe (1, n, q+1), pour $3 \leq n \leq q$.

Les travaux de G. TALLINI sont à l'origine de la dernière section du chapitre 3. Nous y définissons la notion d'*ensemble de Tallini*, étendant celle d'ensemble de classe (0, 1, 2, q+1) aux espaces projectifs infinis. Nous abordons leur étude par leur classification dans les espaces de dimension inférieure ou égale à 4 et par la construction de familles infinies d'ensembles de Tallini qui ne sont pas des quadriques ; ceci nous conduit à penser que la classification générale des ensembles de Tallini est sans espoir. Nous nous orientons alors vers la caractérisation des quadriques orthogonales (finies ou non) grâce aux résultats sur les espaces de Shult projectifs. Nous nous consacrons ensuite plus particulièrement aux quadriques finies, en généralisant les résultats de G. TALLINI. Dans [32], cet auteur prouve que les ensembles de classe (0, 1, 2, q+1) de $P_d(q)$, dont le cardinal vaut au moins $q^{d-1} + \ldots + 1$, sont essentiellement les quadriques orthogonales de $P_d(q)$, si d est pair, et les quadriques hyperboliques de $P_d(q)$, si d est impair ; dans son deuxième article [33], il donne une caractérisation particulière des quadriques elliptiques des espaces de dimension impaire. Nous améliorons ces résultats, lorsque q est impair et supérieur à 3, en abaissant la borne choisie par G. Tallini, de façon à caractériser globalement les trois types de quadriques finies.

Les deuxième et troisième sections du chapitre 3 concernent les ensembles de classe (0, 1, n, q+1), pour $n > 2$; elles élargissent donc les recherches de M. TALLINI-SCAFATI sur les ensembles de classe (1, n, q+1).

Nous déterminons entièrement les ensembles de classe (0, 1, q, q+1), en généralisant les méthodes utilisées par M. TALLINI-SCAFATI [36] pour classer les ensembles de classe (1, q, q+1). En fait, ce résultat est valable dans les espaces projectifs infinis de dimension finie.

L'étude des ensembles de classe (0, 1, n, q+1) des plans projectifs se ramène à celle des arcs réguliers. M. TALLINI-SCAFATI [35] prouve que les arcs de type (1,n) sont, pour $3 \leq n \leq q-1$ et q puissance d'un premier, les sous-plans de Baer et les unitaux du plan. Ces derniers sont loin d'être classés. Pourtant, dans les plans arguésiens, la seule classe d'unitaux connue est celle décrite récemment par METZ [24], qui généralise les coniques hermitiennes. Nous en obtenons une caractérisation par leur propriété d'intersection avec les sous-droites de Baer du plan.

La troisième section du chapitre est sans doute la plus importante : elle constitue un premier pas vers une généralisation des résultats de M. TALLINI-SCAFATI [36] caractérisant les quadriques hermitiennes finies en tant qu'ensemblesde classe (1, n, q+1). Nous étudions les ensembles Q de classe (0, 1, n, q+1) de $P_d(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, contenant une droite, par des méthodes essentiellement différentes de celles utilisées par M. TALLINI-SCAFATI. Sachant que tout ensemble Q ci-dessus, qui satisfait à l'axiome de Shult, est une quadrique hermitienne, nous analysons les ensembles Q qui ne constituent pas un espace de Shult projectif de $P_d(q)$. Nous montrons que ces ensembles admettent nécessairement des sections planes réunion d'une droite et d'un arc maximal ou complément d'un tel arc. Les ensembles Q possédant une section de ce dernier type peuvent être déterminés, si $n \neq \frac{q}{2} + 1$, q pair. Par contre, les ensembles n'en possédant pas sont plus difficiles à cerner; nous en donnons une classification dans les espaces projectifs de dimension 3 et en déduisons une caractérisation des quadriques hermitiennes en dimension supérieure. La classification de ces ensembles dans $P_3(q)$ est réalisée grâce à la théorie des espaces de Shult faiblement projectifs établie au chapitre 2. Elle permet, en effet, de déterminer les droites de Q; la seule inconnue sur Q est donc l'ensemble de ses points n'appartenant à aucune droite de Q. Nous n'avons pu prouver l'existence ou la non-existence de tels ensembles, mais nous montrons que, si n est suffisamment grand par rapport à q, ils ne peuvent exister.

Pour terminer la section, nous déduisons de nos résultats le théorème de M. TALLINI-SCAFATI, en signalant que sa portée est, en fait, moins générale qu'elle ne l'annonce : en effet, elle utilise implicitement l'hypothèse $n \neq \frac{q}{2} + 1$ pour q pair, hypothèse qui nous est également nécessaire.

Clôturons cette introduction en signalant que, s'il n'y est pas question de chapitre 1, celui-ci n'en existe pas moins dans notre travail : il rassemble les définitions et notations utilisées par la suite.

1. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Ce chapitre introduit la notion de sous-structure d'incidence d'un espace projectif P et réunit les diverses définitions et notations utilisées dans la suite.

Soit P un espace projectif. Dans ce travail, P est supposé de *dimension finie* d $\geq$ 2. Lorsque P est un espace projectif fini, son ordre est noté q; si P est arguésien, q est puissance d'un nombre premier p : nous posons $q = p^h$. L'espace P peut être considéré comme une structure d'incidence $P = (\mathcal{P}(P), \mathcal{L}(P))$, où $\mathcal{P}(P)$ est l'ensemble des points de P (notés a, b,c, ...), $\mathcal{L}(P)$ l'ensemble des droites de P (notées A,B,C, ...) et l'incidence, la relation d'appartenance. P est alors un espace linéaire; un sous-espace de P (au sens usuel) est un sous-espace linéaire de P. Pour éviter toute confusion avec la notion de sous-espace projectif de P définie ci-dessous, nous appelons les sous-espaces linéaires de P, *variétés linéaires* de P; elles sont notées S,T,U, ... La variété linéaire engendrée par un sous-ensemble X de points de P est notée $\langle X \rangle$. En particulier, $\langle a,b \rangle$ est la droite de P déterminée par les deux points distincts a et b; $\langle a,b,c \rangle$ est le plan déterminé par les trois points non alignés a,b,c et est noté α ou β ou γ ... .

Une structure d'incidence $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ est une *sous-structure d'incidence de* P si $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(P)$, $\mathcal{L}$ un sous-ensemble de $\mathcal{L}(P)$ et l'incidence entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, la relation d'appartenance dans P. Une sous-structure d'incidence de P qui est elle-même un espace projectif est appelée *sous-espace projectif* de P.

Ce travail est consacré à l'étude de sous-structure d'incidence $Q = (\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ de P, telles que toute droite de $\mathcal{L}(Q)$ est incidente à au moins deux points de $\mathcal{P}(Q)$. Un point appartenant à $\mathcal{P}(Q)$ est dit *point de* Q et l'ensemble des points de Q incidents à une droite de $\mathcal{L}(Q)$ est appelé *droite de* Q. En d'autres termes, nous étudions les sous-ensembles de points de P (appelés points de Q), muni des "traces" de certaines droites de P (appelées droites de Q). La sous-structure d'incidence Q est dite *structure d'incidence dans* P si $\langle \mathcal{P}(Q) \rangle = P$.

Si tout point de P appartenant à une droite de $\mathcal{L}(Q)$ est un point de Q (c'est-à-dire si les droites de Q sont des droites de P) et si tout point de Q est incident à au moins une droite de Q, alors Q est dite *réglée* et Q est déterminée par un ensemble $\mathcal{L}(Q)$ de droites de P.
Les espaces de Shult projectifs définis dans [12] sont des ensembles de ce type. Si S est une variété linéaire de P, nous désignons par $S \cap Q$, la structure d'incidence formée des points de $S \cap \mathcal{P}(Q)$ et des droites de $\mathcal{L}(Q)$ contenues dans S. Un *sous-espace de* Q (noté X,Y,Z) est un sous-espace linéaire de la structure d'incidence $(\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$; si Q est réglée, tout sous-espace de Q est une variété linéaire de P.

Deux points distincts a, b de Q sont *adjacents* si la droite $\langle a,b \rangle$ appartient à $\mathcal{L}(Q)$; nous écrivons $a \sim b$ et nous convenons que tout point de Q est adjacent à lui-même. Si a n'est pas adjacent à b, nous écrivons $a \not\sim b$. Le *voisinage* Q_a d'un point a de Q est l'ensemble des points de Q adjacents à a. Un point a de Q est *point double* de Q si a est adjacent à tout point de Q, c'est-à-dire si $Q_a = Q$. Si Q possède un point double, Q est dite *dégénérée*. Une droite A de P est dite *tangente* à Q si $|A \cap \mathcal{P}(Q)| = 1$ ou si $A \in \mathcal{L}(Q)$. Nous disons que A est une *vraie tangente* à Q si $|A \cap \mathcal{P}(Q)| = 1$. Une droite de P qui ne rencontre pas $\mathcal{P}(Q)$ est *extérieure* à Q. Une droite de P qui n'est ni tangente, ni extérieure à Q est dite *sécante* à Q. Si a est un point de P, le *collier* Q_a du point a est l'ensemble des points b de Q tels que $\langle a,b \rangle$ est tangente à Q en b. Remarquons que si a est un point de Q, alors le collier de a est le voisinage du point a.

2. ESPACES DE SHULT FAIBLEMENT PROJECTIFS.

L'objet de ce chapitre est une généralisation (dont l'intérêt apparaîtra au chapitre 3) de résultats obtenus en collaboration avec BUEKENHOUT dans [11] et [12]. Nous y avons montré que les espaces de Shult (et en particulier les quadrilatères généralisés) projectifs sont essentiellement les semi-quadriques. Nous introduisons ici la notion d'espace de Shult faiblement projectif. Nous prouvons que, dans tout espace projectif fini de dimension 3, de telles structures sont essentiellement des espaces de Shult projectifs dans un sous-espace projectif de P et sont dès lors des semi-quadriques dans ce sous-espace. De plus, notre méthode de démonstration permet de conjecturer que le résultat est valable en toute dimension et que, dès lors, les espaces de Shult faiblement projectifs d'un espace projectif fini P sont essentiellement les semi-quadriques d'un sous-espace projectif de P.

A. PRELIMINAIRES.

Définissons la notion d'espace de Shult faiblement projectif.

DEFINITION 2.1. Soit $Q = (\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ une structure d'incidence de (resp. dans) l'espace projectif P, comme nous l'avons définie au chapitre 1. (Rappelons que P est de dimension finie). Nous supposons que $\mathcal{L}(Q) \neq \emptyset$ et que le *cardinal des droites de Q est supérieur à 2*. Nous disons que Q est un *espace de Shult faiblement projectif de (resp. dans) P*, si les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) La structure d'incidence $(\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ est un espace de Shult [13], c'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{L}(Q)$ et pour tout $a \in \mathcal{P}(Q)$ n'appartenant pas à A, le point a est adjacent à exactement un point de A, à moins que a ne soit adjacent à tous les points de $A \cap Q$.

(2) Pour tout $a \in \mathcal{P}(Q)$, la variété linéaire $\langle Q_a \rangle$ engendrée par le voisinage Q_a du point a rencontre Q exactement suivant Q_a.

(3) Si A et B sont deux droites de $\mathcal{L}(Q)$ concourantes dans P, alors A et B se coupent en un point de Q.

Les sous-espaces projectifs de P sont des exemples d'espace de Shult faiblement projectifs de P, ainsi que les semi-quadriques d'un sous-espace projectif de P. Remarquons qu'un espace de Shult faiblement projectif réglé est un espace de Shult projectif au sens de [12]. Dans ce cas, les conditions (2) et (3) sont en effet automatiquement satisfaites : la condition (3) est trivialement vérifiée et la condition (2) est démontrée dans [12].

Une étude des espaces de Shult abstraits a été faite par BUEKENHOUT-SHULT [13]. Divers résultats obtenus dans cette étude intrinsèque peuvent être démontrés ici plus aisément. De plus, les démonstrations effectuées dans le cadre des espaces de Shult faiblement projectifs permettent d'étendre, aux ensembles dégénérés, certains résultats valables, dans le cadre général, pour les espaces non dégénérés seulement. C'est l'objet des propositions 2.1 à 2.4 qui suivent.

PROPOSITION 2.1. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Alors tout sous-espace de Q est un sous-espace projectif de P.

Démonstration. Un sous-espace de Q est, par définition, un espace linéaire dont les droites sont des droites de $\mathcal{L}(Q)$. Il suffit donc de montrer que deux droites de Q dans ce sous-espace, qui sont concourantes dans P, le sont aussi dans le sous-espace de Q. Ceci est assuré par la condition (3).

PROPOSITION 2.2. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Alors les sous-espaces maximaux de Q sont des sous-espaces projectifs de même dimension.

Démonstration. Soit r-1 la dimension maximale des sous-espaces maximaux de Q. (Cette dimension maximale existe puisque P est de dimension finie). Supposons qu'il existe un sous-espace maximal X de Q de dimension strictement inférieure à r-1. Considérons un sous-espace Y de Q de dimension r-1 tel que dim $(X \cap Y)$ est maximale. Soit x un point de X-Y (le point x existe car X est maximal et donc non inclus à Y) et soit Z le sous-espace de Q engendré par x et l'ensemble des points y de Y adjacents à x.
Par la condition (1) de la définition 2.1, l'ensemble de ces points y est un hyperplan de l'espace projectif Y et donc est un espace projectif de dimension r-2. Dès lors, le sous-espace Z est de dimension r-1. Mais, comme l'ensemble des points y de Y adjacents à x contient $X \cap Y$, le sous-espace Z contient le sous-espace engendré par x et $X \cap Y$. Donc $X \cap Z$ contient strictement $X \cap Y$, ce qui contredit l'hypothèse de maximalité de dim $(X \cap Y)$.

DEFINITION 2.2. Si r-1 désigne la dimension commune aux sous-espaces maximaux d'un espace de Shult faiblement projectif, alors r est appelé le *rang* de Q. Les espaces de Shult de rang 2 sont les quadrilatères généralisés.

PROPOSITION 2.3. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Alors l'ensemble Δ des points doubles de Q est un sous-espace de Q (et donc un sous-espace projectif de P).

Démonstration. Il suffit de montrer que, si a et b sont deux points doubles distincts de Q, alors tout point c de Q sur la droite $< a,b >$ est un point double de Q. Le point c est évidemment adjacent à tout point de $< a,b > \cap Q$. Prouvons que c est adjacent à tout point e de $(Q) - < a,b >$. Puisque a et b sont des points doubles, $a \sim e$ et $b \sim e$. Dès lors, par (1), le point e est adjacent à tout point de $< a,b > \cap Q$ et donc $c \sim e$.

LEMME 2.1. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Si S est une variété linéaire de P, alors $S \cap Q$ est un espace de Shult faiblement projectif de (et non nécessairement dans) la variété S.

Démonstration. Soit A une droite de $\mathcal{L}(Q)$ contenue dans S et a un point de $S \cap Q$ non sur A. Toute droite par a qui rencontre A est contenue dans la variété linéaire S. Dès lors, puisque Q est un espace de Shult, $S \cap Q$ satisfait à la condition (1) de la définition 2.1.
De même les conditions (2) et (3) sont vraies pour $S \cap Q$, puisqu'elles sont vraies pour Q.

PROPOSITION 2.4. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Alors les droites de Q ont même cardinal (éventuellement infini), à moins que Q ne soit dégénéré et de rang 2 ou que Q soit un réseau [1)].

Démonstration. Soient A, B $\in \mathcal{L}(Q)$. Montrons que $|A \cap Q| = |B \cap Q|$.
1) Nous prouvons tout d'abord la proposition dans un espace projectif P de dimension 3. Si Q est de rang 4 (c'est-à-dire si Q est un sous-espace projectif de P), la proposition est triviale. Si Q est de rang 3, alors, par

---

1) Nous appelons *réseau* une structure d'incidence dont l'ensemble des droites est la réunion de deux familles de droites telles que deux droites d'une même famille sont gauches et toute droite de l'une rencontre toutes les droites de l'autre. Ces droites sont donc contenues dans une quadrique réglée à 3 dimensions, lorsque le corps de base est commutatif.

la proposition 2.2, A et B sont contenues dans des sous-espaces de dimension 2 de Q. Par la condition (3), ceux-ci se coupent suivant une droite de Q et sont donc des sous-espaces projectifs de même ordre. Dès lors, $|A \cap Q| = |B \cap Q|$. Si Q est non dégénéré de rang 2, alors la condition (1) de la définition 2.1 permet d'établir une bijection entre $A \cap Q$ et $B \cap Q$ à moins que Q ne soit un réseau, ce qui achève la preuve.

2) Si P est de dimension supérieure à 3 et si A et B sont deux droites gauches, considérons la variété linéaire à 3 dimensions $< A,B >$. Par le lemme 2.2, $< A,B > \cap Q$ est un espace de Shult faiblement projectif dans $< A,B >$ et, puisque A et B sont gauches, $< A,B > \cap Q$ ne peut être dégénéré de rang 2. Dès lors, par le 1), $|A \cap Q| = |B \cap Q|$. Si A et B sont concourrantes, soit C une droite de Q rencontrant A en un point distinct de $A \cap B$: une telle droite existe dès que Q n'est pas dégénéré de rang 2. Alors $< A,B,C > \cap Q$ est un espace de Shult faiblement projectif dans la variété à 3 dimensions $< A,B,C >$ qui ne peut être dégénéré de rang 2. Si $< A,B,C > \cap Q$ n'est pas un réseau, le 1) permet d'achever la démonstration. Si $< A,B,C > \cap Q$ est un réseau, soit a un point de C, non sur A. Les deux droites C et C' par a du réseau $<A,B,C > \cap Q$ rencontrent respectivement A et B en les points c et c'. Soit D une droite de Q non dans $< A,B,C >$ rencontrant B en un point différent de c'. (Une telle droite D existe car les droites de Q extérieures à $< A,B,C >$ ne peuvent toutes passer par $A \cap B$). Par la condition (3), il existe une droite E par a rencontrant D : cette droite est nécessairement gauche à A et B.
Par ce qui précède, on a alors $|A \cap Q| = |E \cap Q| = |B \cap Q|$.

NOTATION 2.1. Dans la suite, Q sera toujours un espace de Shult faiblement projectif dans P, qui n'est *ni un réseau, ni à la fois dégénéré et de rang 2.* Nous désignons par $s+1$ le cardinal des droites de Q.

Nous donnons maintenant une propriété des espaces de Shult dégénérés faiblement projectifs, montrant le lien de ceux-ci avec les espaces non dégénérés.
Soit Δ le sous-espace des points doubles d'un espace de Shult Q faiblement projectif dans P de dimension d. Considérons l'espace projectif P_Δ quotient de P par la variété linéaire $< \Delta >$.
Si δ est la dimension du sous-espace projectif Δ et donc aussi de la variété linéaire $< \Delta >$, l'espace P_Δ est un espace projectif de dimension $d-\delta-1$, dont les points sont les variétés linéaires de P de dimension $\delta+1$ contenant $< \Delta >$ et dont les droites sont les variétés de dimension $\delta+2$ contenant $< \Delta >$.

L'espace de Shult Q de P induit alors dans P_Δ une sous-structure d'incidence Q_Δ dont l'ensemble des points $\mathcal{P}(Q_\Delta)$ est l'ensemble des variétés $< X >$ engendrées par les sous-espaces X de Q de dimension $\delta+1$, contenant Δ, et dont l'ensemble des droites $\mathcal{L}(Q_\Delta)$ est l'ensemble des variétés $< Y >$ engendrées par les sous-espaces Y de Q de dimension $\delta+2$, contenant Δ.

Visualisons la situation. L'espace quotient P_Δ peut être réalisé par la "projection à partir de Δ" de P sur une variété linéaire S de P complémentaire à $< \Delta >$. La sous-structure d'incidence Q_Δ décrite ci-dessus fournit alors une "projection" Q_S de Q dans S. Analysons cette projection. On voit facilement que tout point a de Q engendre avec Δ un sous-espace X de Q, de dimension $\delta+1$; ce sous-espace X est un sous-espace projectif de la variété linéaire $< a,\Delta >$; comme celle-ci rencontre S en un point a_S, le point a se projette dans S en a_S. De même toute droite $A \cap Q$ de Q gauche à Δ engendre avec Δ un sous-espace Y de Q, de dimension $\delta+2$; ce sous-espace Y est un sous-espace projectif de $< A,\Delta >$; comme $< A,\Delta >$ rencontre S suivant une droite A_S, la droite $A \cap Q$ se projette suivant la droite $A_S \cap Q_S$ de Q_S. On voit alors facilement qu'il existe une projection canonique des sous-espaces de Q sur les sous-espaces de Q_S et Q apparaît comme la réunion de sous-espaces projectifs dans les variétés linéaires $< X_S,\Delta >$, où X_S est un sous-espace maximal de Q_S.

Nous allons montrer que Q_S est un espace de Shult faiblement projectif dans S et est non dégénéré.

PROPOSITION 2.5. Soit Δ le sous-espace des points doubles d'un espace de Shult Q faiblement projectif dans P et soit S une variété linéaire de P complémentaire à $< \Delta >$. Alors la "projection" Q_S de Q sur S à partir de Δ est un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans S, à moins que Q_S ne soit une structure d'incidence dont l'ensemble des droites est vide.

Démonstration. 1) Il est clair que Q_S est une structure d'incidence dans S. En effet, nous avons vu que Q est inclus à la réunion des variétés $< X_S,\Delta >$, où X_S est un sous-espace maximal de Q_S. Dès lors, si l'ensemble des points de Q_S n'engendrait pas S, l'ensemble des points de Q ne pourrait engendrer P. 2) Si Q est de rang $\delta+1$, alors l'ensemble des droites de Q_S est vide. Si le rang de Q est supérieur à $\delta+1$, nous montrons que Q_S vérifie les conditions (1), (2), (3) de la définition 2.1.

(1) Soient a_S un point de Q_S et A_S une droite de Q_S ne comprenant pas a_S. Considérons les sous-espaces correspondants X et Y de Q : ce sont des sous-espaces contenant Δ, de dimension respective $\delta+1$ et $\delta+2$. Soit $A \cap Q$ une droite de Q dans Y, gauche à Δ et soit a un point de $X-\Delta$. Puisque Q est un espace de Shult, a est adjacent à un ou tous les points de $A \cap Q$. Or, toute droite B de Q par a rencontrant A détermine avec Δ un sous-espace Z de Q de dimension $\delta+2$ contenant X et rencontrant Y suivant un sous-espace de dimension $\delta+1$. Comme les droites de Q_S par a_S, qui rencontrent A_S, correspondent à ces sous-espaces Z, nous avons prouvé la propriété souhaitée.

(2) Soit X le sous-espace de Q correspondant à un point a_S de Q_S et soient Y_i les sous-espaces de Q contenant X. Si la condition (2) n'est pas satisfaite pour le point a_S de Q_S, alors il existe, dans la variété $< Y_i >$, un sous-espace Z de dimension $\delta+1$ non contenu dans un Y_i. Si $a \in X-\Delta$, alors les points de $Z-\Delta$ appartiennent à $< Q_a >$, mais ne sont pas adjacents à a, ce qui est contraire au fait que Q est un espace de Shult faiblement projectif. La condition (2) est donc vérifiée.

(3) La condition (3) se vérifie aisément.

3) Il reste à prouver que Q_S est non dégénéré. Supposons que Q_S possède un point double a_S : pour tout point b_S de Q_S, $b_S \sim a_S$. Soit X le sous-espace de Q correspondant à a_S. Exprimer que a_S est adjacent à tout point b_S de Q_S revient à dire que, pour tout sous-espace Y de Q de dimension $\delta+1$ contenant Δ, X et Y sont inclus à un sous-espace de Q. Par conséquent, tout point de X est adjacent aux points de Y, pour tout Y. Donc les points de X sont des points doubles de Q et $X \subset \Delta$, ce qui est impossible par la définition de X.

Nous terminons par un lemme.

LEMME 2.2. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P et soient a et b deux points adjacents de Q, qui ne sont pas des points doubles de Q. Alors il existe un point c de Q tel que $c \not\sim a$ et $c \not\sim b$.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que tout point de Q est adjacent à a ou b. Puisque a et b ne sont pas points doubles, il existe $e \not\sim a$ (et alors $e \sim b$) et $f \not\sim b$. Soit $A \cap Q$ la droite de Q par e rencontrant $< f,a >$; le point e' d'intersection est nécessairement distinct de a. Dès lors, tout point $c \neq e, e'$ de $A \cap Q$ est un point de Q non adjacent à a et b.

B. HYPERPLANS TANGENTS A Q ET PERSPECTIVITES CONSERVANT Q.

Nous allons prouver que, si Q est un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, alors la variété linéaire $< Q_a >$ engendrée par le voisinage de tout point a de Q est un hyperplan de P.

LEMME 2.3. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P. Alors, pour tout point a non double de Q, l'espace $< Q_a >$ est un sous-espace propre de P.

Ceci est une conséquence immédiate de la condition (2) et du fait que Q est non dégénéré.

LEMME 2.4. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P et soient a et b deux points non doubles de Q. Alors $\dim < Q_a > = \dim < Q_b >$.

Démonstration. 1) Si a $\not\sim$ b, alors $< Q_a > \cap < Q_b >$ est un hyperplan dans $< Q_a >$: en effet, $< Q_a > \cap < Q_b >$ est une variété linéaire propre de $< Q_a >$, sinon par (2) (définition 2.1) a $\sim$ b; d'autre part, par les conditions (1) et (3), $Q_a \cap Q_b$ engendre avec le point a la variété $< Q_a >$ et donc $< Q_a > \cap < Q_b > = < Q_a \cap Q_b >$ est un hyperplan de $< Q_a >$.
De même $< Q_a > \cap < Q_b >$ est un hyperplan de $< Q_b >$ et donc $\dim < Q_a > = \dim < Q_b >$.
2) Si a $\sim$ b, on peut choisir un point c $\not\sim$ a, b (voir lemme 2.2) et dès lors, par le 1), on peut achever la démonstration.

LEMME 2.5. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P. Alors, pour tout point a de Q, le point a est l'unique point de Q adjacent à tous les points de Q_a .

Démonstration. Supposons qu'il existe un deuxième point a' de Q adjacent à tous les points de Q_a. Alors a' $\sim$ a et, puisque Q est un espace de Shult, tout point de $< a,a' > \cap$ Q est adjacent à tous les points de Q_a. Soit b $\in \mathcal{P}(Q) - Q_a$. Il existe une droite de Q par b qui rencontre la droite $< a,a' > \cap$ Q en un point a". Par conséquent $< Q_{a"} >$ contient strictement $< Q_a >$, ce qui contredit le lemme 2.5.

PROPOSITION 2.6. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P. Alors, pour tout point a de Q, l'espace $< Q_a >$ est un hyperplan de Q.

Démonstration. Soit b ∈ $\mathcal{P}$(Q) - Q_a et S la variété linéaire $< Q_a, b >$. Grâce aux lemmes 2.1 et 2.5, S ∩ Q est un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans S. Par conséquent (lemme 2.4), pour tout point c de S ∩ Q, dim $< (S \cap Q)_c > =$ dim $< Q_a >$, puisque $Q_a = (S \cap Q)_a$. Or $(S \cap Q)_c \subset Q_c$ et, par le lemme 2.4, dim $< Q_c > =$ dim $< Q_a >$. Donc $< (S \cap Q)_c > = < Q_c >$, pour tout point c de S ∩ Q.
Supposons, au contraire de la thèse, que dim $< Q_a > \leqslant d-2$, où d est la dimension de P. Alors dim S $\leqslant$ d-1 et il existe un point e de Q extérieur à S. Si A est une droite de $\mathcal{L}$(Q) par a, alors il existe un point c de A ∩ Q tel que c ∿ e. Il existe donc un point c de S adjacent à un point extérieur à S, ce qui contredit le résultat $< (S \cap Q)_c > = < Q_c >$, obtenu ci-dessus.

Si l'espace de Shult non dégénéré Q est réglé, on peut pousser plus loin l'investigation de $< Q_a >$ et montrer que cet hyperplan est exactement la réunion des droites tangentes à Q en a (voir [12]). Ce résultat est faux en général, mais il justifie la définition suivante.

DEFINITION 2.3. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P. Alors l'hyperplan $< Q_a >$ est appelé *hyperplan tangent à Q en a* et est noté H_a .

La proposition 2.6 permet de prouver une propriété importante des espaces de Shult faiblement projectifs.

PROPOSITION 2.7. Soit Q un espace de Shult faiblement projectif dans P et soit a un point non double de Q. Si A_i sont les droites de $\mathcal{L}$(Q) dans un plan α par a, alors toute droite $B \neq A_i$ de α joignant deux points de Q rencontre chacune des droites A_i en un point de Q.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si α ∩ Q contient une droite de Q, α ∩ Q doit être une réunion de droites de Q par a ou un sous-plan de α. Si α ∩ Q ne contient qu'une seule droite de Q ou si α ∩ Q est un sous-plan, alors la proposition est trivialement vérifiée. Supposons que α ∩ Q contienne deux droites de Q sans être un sous-espace de Q.

Soit b un point de Q non adjacent à a. La variété linéaire $< \alpha,b >$, de dimension 3, rencontre Q en un espace faiblement projectif dans $< \alpha,b >$.
Cet espace de Shult $< \alpha,b > \cap Q$ ne peut être dégénéré : en effet, supposons qu'il possède un point double c; ce point est nécessairement différent de a et non dans α; dès lors, une droite de $\alpha \cap Q$ par a et le point c sont contenus dans un sous-espace de $< \alpha,b > \cap Q$ et donc $a \sim c$; par conséquent, la variété linéaire engendrée par le voisinage de a contient $< \alpha,b >$et, par la condition (2) de la définition 2.1, on aurait $a \sim b$, ce qui contredit le choix de b. Nous avons ainsi montré que l'intersection $< \alpha,b > \cap Q$ est non dégénérée. Par conséquent, tout point de $< \alpha,b > \cap Q$ possède un plan tangent dans $< \alpha,b >$ (voir proposition 2.8)
Soit B une droite de α joignant deux points de Q : B est une sécante $< a_j,a_k >$, avec $a_j \in A_j \cap Q$ et $a_k \in A_k \cap Q$ $(j \neq k)$. Comme il existe un point $e \neq a$ de $< \alpha,b > \cap Q$ adjacent à a_j et a_k, la sécante B est l'intersection des plans tangents à $< \alpha,b > \cap Q$ en a et e dans $< \alpha,b >$. Dès lors, les conditions (1) et (3) de la définition 2.1 montrent que B rencontre toutes les droites A_i par a en des points de Q.

En fait, la *propriété que nous venons de démontrer est équivalente à la condition (3) de la définition 2.1, lorsque Q est non dégénéré.* En effet, la proposition 2.7 montre que, si Q est non dégénéré, (3) implique la condition :

(3') Soit $a \in \mathcal{P}(Q)$ et A_i les droites de $\mathcal{L}(Q)$ dans un plan α par a. Alors, toute droite $B \neq A_i$ dans α, joignant deux points de $\alpha \cap Q$, rencontre chacune des droites A_i en un point de Q.
Inversément, (3') implique (3), pour toute structure d'incidence (dégénérée ou non) vérifiant (1) et (2). Prouvons-le.
Soient A et B deux droites concourrantes appartenant à $\mathcal{L}(Q)$.
Soit $a \in A \cap Q$. Par (1), le point a est adjacent à au moins un point de $B \cap Q$; il existe donc par a une droite $C \in \mathcal{L}(Q)$ rencontrant B en un point de Q. Dès lors, le plan $< A,C >$ est contenu dans $< Q_a >$ et donc, par (2), a est adjacent à tous les points de $B \cap Q$. Comme B comprend au moins deux points de Q, la condition (3') permet de déduire que B rencontre A en un point de Q.

Nous prouvons maintenant une propriété des hyperplans tangents à Q.

PROPOSITION 2.8. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P et soient a,b,c trois points non adjacents de Q, alignés dans P. Alors les intersections $H_a \cap H_b$, $H_b \cap H_c$ et $H_c \cap H_a$ coïncident.

Démonstration. Il suffit de montrer que $H_a \cap H_b$ est inclus à H_c. Soit e un point de Q dans $H_a \cap H_b$ c'est-à-dire soit $e \in Q_a \cap Q_b$. Alors $a,b \in Q_e$ et donc H_e contient la droite $< a,b >$. Dès lors, $c \sim e$ et $e \in H_c$. Comme $< Q_a \cap Q_b > = H_a \cap H_b$, nous avons ainsi prouvé que $H_a \cap H_b \subset H_c$.

La proposition suivante permet de construire des perspectivités conservant Q.

PROPOSITION 2.9. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P. Soient a un point de Q et b, b' deux points de Q non adjacents au point a, alignés avec a. Alors, la perspectivité de centre a et axe H_a, envoyant b sur b', conserve Q.

Démonstration. Soit σ la perspectivité de centre a et axe H_a, appliquant b sur b'. Désignons par A la sécante $< b,b' >$. La perspectivité σ fixe tous les points de H_a et donc tous les points de Q_a. Soit $c \in \mathcal{P}(Q) - Q_a$. Supposons $c \notin A$. Considérons la droite $B = < b,c >$. Elle rencontre H_a en un point e et $B^\sigma = < b',e >$.

1) Si B est une droite de Q, alors e est un point de Q, par la condition (2) de la définition 2.1 et, par cette même condition, la droite $< a,e >$ est une droite de Q.

Alors, le plan $< a,b,e >$ est contenu dans H_e et donc le point b', contenu dans ce plan, est adjacent à e. Dès lors, le point $c^\sigma = B^\sigma \cap < a,c >$ est un point de Q, par la proposition 2.7.

2) Si B n'est pas une droite de Q, supposons tout d'abord qu'il existe un point f, non dans H_a, adjacent à b et c. Par le 1), f^σ appartient à Q (car f n'est pas sur A). Dès lors, les points f et f^σ peuvent jouer les rôles de b et b' en 1) et donc c^σ est un point de Q. Si tous les points adjacents à b et c appartiennent à H_a, on choisit deux points adjacents f et g, tels que $f \sim b$ et $g \sim c$. En appliquant le même raisonnement que ci-dessus, on obtient que c^σ est un point de Q.

Enfin, si $c \in A$, on choisit un point h de Q non sur A et on utilise les résultats précédents.

On a donc prouvé que Q est conservé par σ.

De l'invariance de Q par ces perspectivités, nous pouvons déduire les propriétés suivantes.

COROLLAIRE 2.1. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P. Alors toutes les droites sécantes à Q rencontrent Q en le même nombre de points.

Démonstration. Soient A et A' deux sécantes. Nous allons montrer que $|A \cap Q| = |A' \cap Q|$.

1) Si A et A' se coupent en un point a de Q, soit B une sécante quelconque par a. Considérons le groupe Σ des perspectivités de centre a et axe H_a laissant Q invariant. Par la proposition 2.9, ce groupe est régulier sur l'ensemble des points $(B \cap Q) - \{a\}$, pour toute sécante B. Par conséquent, $|B \cap Q| = |\Sigma| + 1$ et en particulier $|A \cap Q| = |A' \cap Q|$.

2) Si A et A' n'ont pas de point de Q en commun, considérons un point a sur A et un point a' sur A'.

Si $a \not\sim a'$, alors par le 1), $|A \cap Q| = |\langle a,a' \rangle \cap Q| = |A' \cap Q|$.

Si $a \sim a'$, on peut considérer (lemme 2.2) un point b non adjacent à a et a'. Dès lors, $|A \cap Q| = |\langle a,b \rangle \cap Q| = |\langle b,a' \rangle \cap Q| = |A' \cap Q|$, ce qui achève la démonstration.

NOTATION 2.2. Le nombre de points de Q sur une droite sécante à Q est noté $t + 1$.

COROLLAIRE 2.2. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Soient a,b,b' trois points de Q appartenant à une droite de Q. Alors, il existe une projectivité fixant a et appliquant b sur b', qui conserve Q.

Démonstration. Soit A la droite $\langle a,b \rangle$ et soit $B \cap Q$ une droite de Q par a, telle que $\langle A,B \rangle$ ne rencontre pas Q suivant un sous-espace de Q : une telle droite B ($\neq$ A) existe, car si toute droite B de Q par a était contenue dans un sous-espace de Q par A, alors Q_a serait la réunion de sous-espaces de Q par la droite A et donc il existerait plus d'un point adjacent à tous les points de Q_a, ce qui contredit le lemme 2.6. L'intersection $\langle A,B \rangle \cap Q$ est

donc formée de t+1 droites de Q par a (voir proposition 2.7 et notation 2.2). Puisque $t > 1$, nous pouvons choisir une droite $C \in \mathcal{L}(Q)$ avec $C \neq A,B$ dans le plan $< A,B >$. Soit $b_1 \in B$.
La sécante $< b_1, b >$ rencontre C en un point c_1. Soit σ_1 la perspectivité de centre b_1 et axe H_{b_1} appliquant b sur c_1 : elle conserve Q (proposition 2.9). La droite $< c,b' >$ rencontre la droite B en un point b_2. Soit σ_2 la perspectivité de centre b_2 et axe H_{b_2} appliquant c_1 sur b' : elle conserve également Q. Dès lors, la composée $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ envoie b sur b' et fixe le point $a = A \cap B$, puisqu'elle fixe la droite B incluse à $H_{b_1} \cap H_{b_2}$. Remarquons que σ induit dans le plan $< A,B >$ une perspectivité de centre a et axe B.

C. CONSTRUCTION D'UN SOUS-ESPACE PROJECTIF DE P A PARTIR DE Q.

Nous avons remarqué que les semi-quadriques, et plus généralement les espaces de Shult projectifs d'un sous-espace projectif de P, sont des espaces de Shult faiblement projectifs de P. On peut se demander si tout espace de Shult faiblement projectif de P est de ce type. Une réponse partielle à cette question est donnée dans ce paragraphe. Nous allons prouver que si P est un espace projectif fini de dimension 3, alors tout espace de Shult non dégénéré Q faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$, est un espace de Shult projectif dans un sous-espace de P. L'hypothèse de finitude de l'espace projectif joue un rôle essentiel dans la démonstration (voir proposition 2.10); par contre, la restriction sur la dimension de P ne nous paraît pas fondamentale, ce qui nous conduit à conjecturer la généralisation du résultat aux espaces projectif finis de dimension quelconque $d \geq 3$.

Le lemme suivant ne nécessite aucune hypothèse sur l'espace projectif P, excepté la finitude de dimension imposée dès le début.

LEMME 2.6. Soit Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Soit α un plan de P rencontrant Q suivant t+1 droites de Q par un point a. Alors, le groupe G engendré par les perspectivités σ de centre $b \in \alpha \cap Q$ et axe H_b, laissant Q invariant, est transitif sur les sécantes à Q dans α.

Démonstration. Soient A et A' deux sécantes à Q dans α.
1) Supposons que A et A' se coupent en un point c de Q. Soient $e \in A \cap Q$ et $e' \in A' \cap Q$, tels que e, $e' \not\sim c$ et $e \not\sim e'$. (Les points e et e' existent car $t > 1$). La droite sécante $< e,e' >$ rencontre la droite de $\alpha \cap Q$ par c en un point e" de Q (proposition 2.7). Considérons la perspectivité σ de centre e" et axe $H_{e''}$ envoyant e sur e' : elle conserve Q (proposition 2.9). Cette perspectivité fixe la droite $< e'',c >$ de $\mathcal{L}(Q)$; elle fixe donc le point c. Par conséquent, $< e,c >^{\sigma} = < e',c >$, c'est-à-dire $A^{\sigma} = A'$. Nous avons ainsi montré qu'il existe un élément de G qui applique A sur A'.
2) Si A et A' se coupent en un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}(Q)$, considérons un point $f \in A \cap Q$ et un point $f' \in A' \cap Q$ telsque $f \not\sim f'$. Soit g un point de $< f,f' > \cap Q$ différent de f et f'. (Le point g existe car $t > 1$). La perspectivité τ de centre g et axe H_g envoyant f sur f' conserve Q. Elle envoie donc la sécante A sur une sécante A" de plan α qui rencontre A' en lepoint f' de Q. Dès lors, par le 1), il existe une perspectivité σ appliquant A" sur A'. Par conséquent, la projectivité $\sigma \circ \tau$ de G applique A sur A', ce qui complète la démonstration.

Nous allons maintenant construire à partir de Q (supposé non dégénéré et tel que $t > 1$) une sous-structure d'incidence de P. Dans ce but, nous construisons tout d'abord une sous-structure d'incidence dans chaque plan α de P rencontrant Q suivant t+1 droites de Q par un point . Cette construction n'est intéressante que si *P est fini*, car, c'est sous cette hypothèse seulement que nous pouvons montrer qu'elle constitue un sous-plan projectif de α.

1) <u>Sous-structure d'incidence $(\mathcal{P}_{\alpha}, \mathcal{L}_{\alpha})$ de α.</u>

Soit α un plan de P rencontrant Q suivant t+1 droites de Q par un point a. Considérons la sous-structure d'incidence suivante $(\mathcal{P}_{\alpha}, \mathcal{L}_{\alpha})$ du plan α : $\mathcal{P}_{\alpha}$ est l'ensemble des points de α appartenant à deux droites de α sécantes à Q, $\mathcal{L}_{\alpha}$ est l'ensemble des droites de α sécantes à Q.

Cette structure d'incidence jouit des propriétés suivantes.
(i) Comme α contient s(t+1) points b de Q non adjacents à a, comme il existe st points de Q non adjacents à b et qu'une sécante à Q comprend t+1 points de Q, nous avons $|\mathcal{L}_{\alpha}| = \frac{s(t+1).st}{t(t+1)} = s^2$.

(ii) Par la définition même de ($\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$), deux droites de $\mathcal{L}_\alpha$ se coupent en un point de $\mathcal{P}_\alpha$.

(iii) Grâce au lemme 2.6, $\mathcal{L}_\alpha$ peut être considéré comme l'orbite par le groupe G d'une sécante A à Q dans α. De plus, les points de $\mathcal{P}_\alpha$ appartenant à une droite de $\mathcal{L}_\alpha$ sont les images par un élément de G des points de $\mathcal{P}_\alpha$ sur A. Par conséquent, le nombre de points de $\mathcal{P}_\alpha$ incidents à une droite de $\mathcal{L}_\alpha$ est indépendant de cette droite. Dès lors, le nombre de droites de $\mathcal{L}_\alpha$ passant par un point de $\mathcal{P}_\alpha$ est également indépendant du point. Or, par un point (distinct de a) de $\alpha \cap Q$, il passe $\frac{st}{s} = s$ sécantes à Q dans α. Par conséquent, par tout point de $\mathcal{P}_\alpha$, passent s droites de $\mathcal{L}_\alpha$.

Ces trois propriétés montrent que *($\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$) est un plan affin dual d'ordre s* [1]. En effet, sa structure d'incidence duale est un ensemble de s^2 points, muni de droites de s points, tels que deux points déterminent une droite; cette structure est un plan affin, par une caractérisation connue des plans affins finis (voir [16] p.139).

2) <u>Sous-structure d'incidence ($\overline{\mathcal{P}}_\alpha$, $\overline{\mathcal{L}}_\alpha$) de α.</u>

Nous allons compléter la sous-structure d'incidence ($\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$) en un sous-plan projectif ($\overline{\mathcal{P}}_\alpha$, $\overline{\mathcal{L}}_\alpha$) de α, grâce aux observations suivantes.

(iv) Les s points, distincts de a, d'une droite de Q par a dans α constituent une classe de points parallèles de ($\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$). En effet, par la définition de $\mathcal{L}_\alpha$, deux points d'une droite de Q par a n'appartiennent à aucune droite de $\mathcal{L}_\alpha$ et, par conséquent, les s points de Q différents de a sur cette droite forment une classe de points parallèles.

(v) Soient b et b' deux points distincts d'une droite de $\alpha \cap Q$ par a (b, b' $\neq$ a). Par le corollaire 2.2, il existe une projectivité conservant Q et induisant dans α une perspectivité de centre a qui a pour axe une droite de $\alpha \cap Q$ et qui applique b sur b'. Considérons l'ensemble H des s perspectivités induites dans α et déterminées par les s points b' $\neq$ a de $\langle a,b \rangle \cap Q$.

---

1) Un plan affin dual est la structure d'incidence duale d'un plan affin. Dans un plan affin dual d'ordre s, les droites sont incidentes à s+1 points et deux droites quelconques ont un point commun. Deux points déterminent 0 ou 1 droite; si deux points n'appartiennent pas à une droite, ils sont dits parallèles et l'ensemble des points du plan est partitionné en s+1 classes de s points deux à deux parallèles.

Soit c un point de $\mathcal{P}_\alpha$ n'appartenant pas à Q. L'orbite de c par H est un ensemble de s points alignés avec a. Comme ces s points sont forcément des points de $\mathcal{P}_\alpha$ et comme aucune droite de α par a n'appartient à $\mathcal{L}_\alpha$, ces s points constituent une classe de points parallèles de $(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$.

Nous avons ainsi montré que les classes de points parallèles du plan affin dual $(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ coïncident avec les "traces" dans $\mathcal{P}_\alpha$ des droites de α par a. Par conséquent la structure d'incidence $(\bar{\mathcal{P}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$, où $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$ est la réunion $\mathcal{P}_\alpha \cup \{a\}$ et $\bar{\mathcal{L}}_\alpha$ est la réunion de $\mathcal{L}_\alpha$ avec les droites de α par a comprenant un point de $\mathcal{P}_\alpha$, est un sous-plan projectif de α. Nous avons donc la

PROPOSITION 2.10. Soient P un espace projectif fini et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que t > 1. Soit α un plan de P rencontrant Q en t+1 droites par un point a. Alors, la réunion de a et des points de α appartenant à deux sécantes à α ∩ Q constitue un sous-plan projectif de α. (Les droites de ce sous-plan sont, bien sûr, les "traces" des droites de α).

Nous sommes maintenant en mesure de construire une sous-structure d'incidence de P et de prouver que celle-ci est un sous-espace projectif de P, lorsque P est de dimension 3.

DEFINITION 2.4. Soit P un espace projectif fini et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que t > 1. On définit une *sous-structure d'incidence $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ dans P* par réunion des plans projectifs $(\bar{\mathcal{P}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$ définis ci-dessus : $\mathcal{P}$ est la réunion des ensembles de points $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$ et $\mathcal{L}$ la réunion des ensembles $\bar{\mathcal{L}}_\alpha$, pour les plans α de P rencontrant Q suivant t+1 droites de Q.

Nous allons montrer que, si P est de dimension 3, $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ est un sous-espace projectif de P.
Ceci nécessite les lemmes suivants.

LEMME 2.7. Soient P un espace projectif fini de dimension 3 et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Si $(\bar{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{\mathcal{I}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathcal{F}}_\beta, \bar{\mathcal{I}}_\beta)$ sont des sous-plans projectifs distincts définis ci-dessus, alors l'intersection de ces deux plans est une droite dans chacun d'eux.

Démonstration. Soient H_a et H_b les plans tangents qui contiennent respectivement $(\bar{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{\mathcal{I}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathcal{F}}_\beta, \bar{\mathcal{I}}_\beta)$.
Comme P est de dimension 3, a et b sont nécessairement distincts, sans quoi $a = b$ serait un point double de Q. Dès lors, la droite $H_a \cap H_b$ ne peut être une vraie tangente à Q. Si $H_a \cap H_b$ appartient à $\mathcal{L}(Q)$, le lemme est trivial. Si $H_a \cap H_b$ est une sécante à Q, $H_a \cap H_b$ appartient à $\bar{\mathcal{I}}_\alpha$ et $\bar{\mathcal{I}}_\beta$. Tout point de Q sur cette sécante appartient évidemment à $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$ et $\bar{\mathcal{F}}_\beta$. Soit c un point de $\bar{\mathcal{F}}_\alpha \cap H_a \cap H_b$, non dans Q. Le point c appartient à une sécante A à Q dans H_a, avec $A \neq H_a \cap H_b$. Soit e un point adjacent aux points de $A \cap Q$: ce point est choisi parmi les points de Q appartenant à l'intersection des plans tangents en deux points de $A \cap Q$ (voir proposition 2.8). Le point e ne peut être dans $H_b \cap Q$, sinon Q serait dégénéré. Dès lors, le plan tangent en e rencontre H_b suivant une sécante B à Q. Cette sécante B passe par c, ce qui montre que $c \in \bar{\mathcal{F}}_\beta$.
Nous avons ainsi prouvé le lemme 2.7.

LEMME 2.8. Soient P un espace projectif fini de dimension 3 et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Si a est un point de Q et si $(\bar{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{\mathcal{I}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas a, alors toute sécante à Q par a rencontre le plan α en un point de $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$.

Démonstration. Soit A une sécante à Q par a. Elle rencontre le plan α en un point c. Soit H_e un plan tangent contenant A. Si e est un point de α, alors le point c appartient clairement à $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$. Si e n'est pas un point de α, alors le point c appartient à $\alpha \cap H_e$ et, par le lemme 2.7., $c \in \mathcal{F}_\alpha$.

LEMME 2.9. Soient P un espace projectif fini de dimension 3 et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Si a est un point de Q et si $(\bar{\mathcal{F}}_\alpha, \bar{\mathcal{I}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas a, alors toute droite joignant a à un point de $\bar{\mathcal{F}}_\alpha - H_a$ est une sécante à Q.

Démonstration. Calculons le nombre de sécantes à Q par un point a de Q. Puisque Q est un espace de Shult non dégénéré d'un espace projectif de dimension 3, Q est de rang 2; Q est un quadrilatère généralisé dont les droites ont s+1 points et ayant t+1 droites par un point. Dès lors [38], le nombre de points de Q vaut (s+1)(st+1). Or, il y a exactement s(t+1)+1 points de Q adjacents à a et les points de Q non adjacents à a se répartissent sur des sécantes à Q, qui rencontrent Q en t+1 points (voir corollaire 2.1). Par conséquent, il passe $\frac{(s+1)(st+1) - s(t+1)-1}{t}$ c'est-à-dire s^2 droites sécantes à Q par a. Par le lemme 2.8, toute sécante à Q rencontre α en un point de $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$. Dès lors, comme aucune droite par a dans H_a n'est sécante à Q, les s^2 sécantes par a sont les s^2 droites joignant a aux s^2 points de $\bar{\mathcal{P}}_\alpha - H_a$.

LEMME 2.10. Soient P un espace projectif fini de dimension 3 et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que t > 1. Si a est un point de Q et si $(\bar{\mathcal{P}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas a, alors tout point de $\mathcal{P}$ appartient à une droite joignant a à un point de $\mathcal{P}_\alpha$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point b de $\mathcal{P}$ non situé sur les droites joignant a à un point de $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$. Ce point b est un point d'un sous-plan projectif $(\bar{\mathcal{P}}_\beta, \bar{\mathcal{L}}_\beta)$ dans un plan β rencontrant Q en t+1 droites de Q. Ce plan β est nécessairement distinct de H_a, car, par le lemme 2.7, b ne peut appartenir à H_a. Si a $\notin \bar{\mathcal{P}}_\beta$, alors, par le lemme 2.9, $\langle a,b \rangle$ est une sécante à Q; si a $\in \bar{\mathcal{P}}_\beta$, alors $\langle a,b \rangle$ est également une sécante à Q, puisque $\beta \neq H_a$. Par conséquent, grâce au lemme 2.8, $\langle a,b \rangle$ rencontre α en un point de $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Ces divers résultats permettent de montrer que $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ est un sous-espace projectif d'ordre s dans P. Dès lors, Q est un espace de Shult projectif dans $(\mathcal{P},\mathcal{L})$.

THEOREME 2.1. Soient P un espace projectif fini de dimension 3 et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que t > 1. Alors Q est un espace de Shult projectif dans un sous-espace projectif dans P.

Démonstration. Nous prouvons que la structure d'incidence $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ définie ci-dessus est un sous-espace projectif dans P. Remarquons que, si $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ est un sous-espace projectif de P, alors $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ est nécessairement un sous-espace dans P, puisque $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}(Q)$ et que $<\mathcal{S}(Q)> = P$. Pour montrer que $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ est un sous-espace projectif de P, il suffit de prouver que $(\mathcal{S},\mathcal{L})$ est un espace linéaire tel que deux droites de $\mathcal{L}$ concourrantes dans P se coupent en un point de $\mathcal{S}$.

1) Soient A, B $\in \mathcal{L}$ concourrantes dans P. Montrons que $A \cap B \in \mathcal{S}$. Soient $(\bar{\mathcal{S}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathcal{S}}_\beta, \bar{\mathcal{L}}_\beta)$ deux sous-plans contenant respectivement A et B. Par le lemme 2.7, l'intersection de ces deux sous-plans est une droite dans chacun d'eux. Par conséquent, $A \cap B$ est un point de $\mathcal{S}$.

2) Montrons que deux points b et b' de $\mathcal{S}$ déterminent une droite appartenant à $\mathcal{L}$. Si b et b' sont dans un même plan rencontrant Q en t+1 droites de Q, alors la propriété est vérifiée. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Considérons un sous-plan $(\bar{\mathcal{S}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$ et un point a de Q non dans α, ni sur $<b,b'>$. Par le lemme 2.9, $<a,b,b'>$ rencontre $\bar{\mathcal{S}}_\alpha$ suivant une droite de $\bar{\mathcal{L}}_\alpha$ et $<a,b,b'> \cap \mathcal{S}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ sur les droites joignant a à la droite $<a,b,b'> \cap \bar{\mathcal{S}}_\alpha$. Donc l'intersection $<a,b,b'> \cap \mathcal{S}$ est un ensemble de $s^2 + s + 1$ points. De plus, les droites de la structure d'incidence $<a,b,b'> \cap (\mathcal{S},\mathcal{L})$ comptent toutes s+1 points; le nombre de droites par un point dans cette structure d'incidence est donc indépendant du point choisi : il vaut s+1 (voir nombre de droites par le point a). Par conséquent, $<a,b,b'> \cap (\mathcal{S},\mathcal{L})$ est constitué de $s^2 + s + 1$ points dont chacun est incident à s+1 droites et est tel que deux de ses droites sont toujours sécantes. Par une caractérisation des plans projectifs finis (voir [16] p.138), $<a,b,b'> \cap (\mathcal{S},\mathcal{L})$ est un plan projectif, ce qui achève la démonstration du théorème.

La démonstration ci-dessus ne peut s'étendre directement aux espaces projectifs P de dimension d > 3. Toutefois, il doit être possible de généraliser le résultat ci-dessus, en utilisant une induction sur la dimension de P. Par exemple, considérons un hyperplan H de P engendré par des points de Q et tel que $H \cap Q$ soit non dégénéré. Si l'on peut prouver des résultats analogues à ceux des lemmes 2.8 à 2.10, en remplaçant le sous-plan $(\bar{\mathcal{S}}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\alpha)$ par le sous-espace projectif dans H construit à partir de $H \cap Q$, alors la démonstration du théorème 2.1 peut se généraliser aux espaces de dimension supérieure à 3. Ceci nous conduit à la

CONJECTURE 2.1. Soient P un espace projectif fini de dimension $d \geq 3$ et Q un espace de Shult non dégénéré faiblement projectif dans P, tel que $t > 1$. Alors Q est un espace de Shult projectif dans un sous-espace projectif dans P.

Cette conjecture, jointe aux résultats de la section D, permet de penser que les espaces de Shult Q faiblement projectifs ci-dessus sont les quadriques hermitiennes ou symplectiques d'un sous-espace projectif dans P. Ce résultat est en tout cas démontré en dimension 3 par les théorèmes 2.1 et 2.5.

D. ESPACES DE SHULT PROJECTIFS.

Cette section synthétise les résultats relatifs aux espaces de Shult projectifs, obtenus en collaboration avec Buekenhout dans [11] et [12]. Nous décrivons, sans démonstration détaillée, les lignes directrices du raisonnement prouvant que les espaces de Shult Q projectifs dans P sont essentiellement les semi-quadriques dans P. Soulignons que cette caractérisation des semi-quadriques en tant qu'espaces de Shult projectifs n'est pas tout à fait générale : quelques hypothèses supplémentaires (sur Q ou P) doivent être introduites au cours du travail; notre but est de mettre en évidence l'origine de ces restrictions, dont on peut conjecturer que la plupart sont superflues.

Dans [12], le point 4) ci-dessous a été placé dans un cadre plus général, celui des ensembles semi-quadriques invariants par "suffisamment de perspectivités" (nous verrons plus loin en quoi consiste cette généralisation). Le plongement de tels êtres dans une polarité de P n'a pu se faire qu'en les supposant de défaut non maximal (voir définition plus loin). Nous montrons, dans le présent travail, que cette hypothèse est superflue pour les espaces de Shult.

Une première étape est de ramener l'étude des espaces de Shult projectifs dans un espace projectif P quelconque, à celle des espaces de Shult projectifs non dégénérés.

THEOREME 2.2. Soit $Q = (\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ *un espace de Shult projectif dans P. Alors, l'ensemble des points doubles de Q est une variété linéaire* Δ *de P. De plus, si S est une variété linéaire de P complémentaire à* Δ *, alors* $\bar{Q} = S \cap Q$ *est un espace de Shult non dégénéré projectif dans S et Q est* *entièrement déterminé à partir de $\bar{Q}$ et Δ : $\mathcal{P}(Q)$ est l'ensemble des points des variétés linéaires déterminées par Δ et un point de $\bar{Q}$ et $\mathcal{L}(Q)$ est l'ensemble des droites des variétés linéaires déterminées par Δ et une droite de $\bar{Q}$.*

Inversément, toute structure d'incidence Q décrite comme ci-dessus, à partir d'une variété linéaire Δ de P et d'un espace de Shult non dégénéré $\bar{Q}$ dans une variété linéaire S complémentaire à Δ, est un espace de Shult projectif dans P dont l'ensemble des points doubles est Δ.

Une démonstration détaillée de ce théorème, valable également en dimension infinie, est due à PERCSY [26].

La suite du travail est consacrée aux espaces de Shult non dégénérés. Pour prouver que ceux-ci sont essentiellement les semi-quadriques, nous construisons à partir de Q une polarité dans laquelle Q est plongée [1]. En effet, puisque la notion d'espace de Shult coïncide [13] avec celle d'espace polaire introduite par TITS [44], nous pouvons, une fois ce plongement réalisé, nous référer au théorème de TITS [44] classant les espaces polaires plongeables dans une polarité; ce théorème achève alors la démonstration du résultat que nous avons annoncé.

La construction d'une polarité à partir de Q se fait en plusieurs étapes. Certaines parties du raisonnement ne sont malheureusement pas valables en toute généralité : nous sommes amenés à introduire quelques hypothèses complémentaires en cours de démonstration.

1) "Hyperplan polaire" d'un point de P.

Nous associons à chaque point a de l'espace projectif P un hyperplan de P ou l'espace P lui-même. Cette relation peut être établie dans un *espace projectif P quelconque de dimension finie d.* La définition de cette relation

---

1) La notion de polarité est prise ici dans son sens le plus large, introduit par TITS [44]; toujours selon la terminologie de Tits, Q est dit plongeable dans une telle polarité si l'ensemble des droites de Q est inclus à l'ensemble des droites totalement isotropes de la polarité.

est dictée par les propriétés de la polarité déterminée par une semi-quadrique de P.

DEFINITION 2.5. Pour tout point a de P, on définit l'*hyperplan polaire* $\Pi(a)$ du point a comme la variété linéaire $< Q_a >$ engendrée par le collier Q_a du point a (voir définitions du chapitre 1). On montre que la variété $<Q_a>$ est un hyperplan de P, à moins qu'elle ne coïncide avec P.

Remarquons que si a est un point de Q, $< Q_a >$ est l'hyperplan tangent H_a tel qu'il a été défini dans la section B de ce travail. Pour les espaces de Shult projectifs, cet hyperplan est exactement la réunion des tangentes à Q par a, résultat qui sera utilisé dans les démonstrations ultérieures. Ceci explique que les raisonnements ci-dessous ne peuvent se généraliser directement aux espaces de Shult faiblement projectifs. De plus, cette propriété nous a permis [12] de généraliser la notion d'espace de Shult projectif en définissant le concept d'ensemble semi-quadratique : un ***ensemble semi-quadratique*** dans P est une sous-structure d'incidence de P telle que la réunion des tangentes en un point est un hyperplan de P ou P lui-même. (Si ce dernier cas est réalisé pour un point de l'ensemble, l'ensemble est dit dégénéré). Il est facile de voir qu'un ensemble semi-quadratique dont l'ensemble des droites est non vide est nécessairement un espace de Shult projectif. La notion d'ensemble semi-quadratique est donc plus générale que celle d'espace de Shult en ce sens qu'elle peut être définie pour des sous-structures d'incidence de P dont l'ensemble des droites est vide. Les points 2) et 3) qui suivent sont relatifs strictement aux espaces de Shult projectifs; le point 4) par contre, est valable également pour certains ensembles semi-quadratiques sans droite. Nous y reviendrons plus loin.

La suite de la démonstration consiste à prouver que la relation Π définie en 1) est une polarité de P, c'est-à-dire qu'elle satisfait à la condition $a \in \Pi(b) \Rightarrow b \in \Pi(a)$, pour tout $a,b \in P$. La preuve de cette propriété est basée sur l'existence de certaines perspectivités conservant Q.

2) Construction de perspectivités conservant Q.

La proposition ci-dessous est valable dans tout *espace projectif de dimension finie d.*

PROPOSITION 2.11. Soit Q un espace de Shult projectif dans P. Soient a un point de P et b,b' deux points distincts de Q, différents du point a. Alors la perspectivité de P de centre a et axe $\Pi(a)$ envoyant b sur b' conserve Q.
Remarquons que cette propriété a été prouvée, pour $a \in (Q)$, dans le cadre des espaces de Shult faiblement projectifs.

Nous savons que toute sécante à un espace de Shult (faiblement) projectif Q rencontre Q en t+1 points. Dès lors, la proposition 2.11 montre que, si $t > 1$, il existe, pour tout point a de P tel que $\Pi(a) \neq P$, une perspectivité non triviale de centre a et axe $\Pi(a)$ conservant Q.

Dans la suite du raisonnement, *nous supposons* $t > 1$. Cette restriction n'est pas fort gênante car, si t=1, Q est un ensemble quadratique dans P et, grâce au résultat de BUEKENHOUT [7], Q est une quadrique dans P, ce qui prouve le résultat annoncé lorsque t=1.

3) Points défectifs de Q.

Nous allons montrer qu'en général, les points de P tels que $\Pi(a) = P$, sont les points défectifs de P.

DEFINITION 2.6. Un point de P est appelé *point défectif de Q* s'il appartient à tous les hyperplans tangents à Q. On voit facilement que l'ensemble des points défectifs de Q est une variété linéaire de P, dont la dimension est inférieure ou égale à d-2. Si elle vaut d-2, Q est dit de *défaut maximal.*[1)]

PROPOSITION 2.12. Soit Q un espace de Shult non dégénéré projectif dans P de rang $r \geq 3$. Si a est un point de P tel que $\Pi(a) = P$, alors a est un point défectif de Q.
Ce résultat n'est autre que celui de la proposition 10 dans [12].

Cette proposition ne peut s'étendre aux espaces de Shult de rang 2, c'est-à-dire aux quadrilatères généralisés, que si *P est fini.*

---

1) Cette définition peut être étendue aux ensembles semi-quadratiques

PROPOSITION 2.13. Soient P un espace projectif fini et Q un quadrilatère généralisé non dégénéré dans P, tel que $t > 1$. Si a est un point de P tel que $\Pi(a) = P$, alors a est un point défectif de Q.

Ceci a été démontré dans [11] . On y définit la fermeture linéaire dans $\mathcal{P}(Q)$ d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(Q)$, par la notion d'ensemble linéairement fermé dans $\mathcal{P}(Q)$: un ensemble E de points de Q est linéairement fermé dans $\mathcal{P}(Q)$ si les points de Q, appartenant à toute droite de P joignant deux points de E, sont dans E. On montre alors (lemmes 11 à 14) que la fermeture linéaire dans $\mathcal{P}(Q)$ d'un ensemble E de points de Q est la section de Q par la variété $\langle E \rangle$; ce résultat est basé essentiellement sur l'inégalité de HIGMAN [19] , redémontrée par CAMERON [14] . Or (proposition 4), si une droite de P comprend deux points du collier Q_a d'un point a, alors tous les points de Q sur cette droite sont dans Q_a. On déduit de ces deux propriétés (proposition 10) que si $\langle Q_a \rangle = P$, alors a est un point défectif.

Les deux propositions ci-dessus, jointes à la proposition 2.11, montrent que si $t > 1$ et si Q est de rang ≥ 3, ou lorsque P est fini si Q est de rang ≥ 2, alors il existe, pour tout point a non défectif de P, une perspectivité non triviale de centre a conservant Q.

4) Polarité Π dans P.

Considérons la relation Π construite en 1). Voyons sous quelle(s) condition(s) Π est une polarité de P. Nous donnons ici une nouvelle étude de la question qui s'inspire néanmoins fortement de [11] et [12] . En effet, les démonstrations de [12] sont faites dans le cadre des ensembles semi-quadratiques Q qui admettent, pour chaque point a non défectif, une perspectivité de centre a conservant Q; dans ce contexte plus général, le travail nécessite l'hypothèse que Q est de défaut non maximal, hypothèse qui est superflue dans le cas des espaces de Shult comme nous le montrons ci-dessous.

Nous allons prouver que, *si tout point a de P tel que $\Pi(a) = P$ est un point défectif de Q,* alors la relation Π est une polarité de P. Montrons que si $a \in \Pi(b)$ alors $b \in \Pi(a)$.

a) Si $\Pi(a) = P$, la propriété est triviale.

b) Si $\Pi(b) = P$, alors, par l'hypothèse faite, b est un point défectif de Q. Prouver la condition revient alors à montrer que l'ensemble des points défectifs est inclus à l'hyperplan polaire $\Pi(a)$ de tout point a de P. Nous pouvons supposer que $\Pi(a)$ est un hyperplan. Considérons (proposition 2.11) une perspectivité non triviale σ de centre a et axe $\Pi(a)$ conservant Q. La variété linéaire des points défectifs de Q est évidemment invariante par σ. Or les variétés linéaires invariantes par σ sont les variétés comprenant a et les variétés contenues dans $\Pi(a)$. Comme a n'est pas un point défectif, ceci montre que la variété linéaire des points défectifs de Q doit être contenue dans $\Pi(a)$, ce qui achève le b).

c) Si $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ sont des hyperplans, considérons la perspectivité σ de centre a et axe $\Pi(a)$. Puisque $b \in \Pi(a)$, b est fixe et donc, par la définition de $\Pi(b)$, l'hyperplan $\Pi(b)$ est invariant par σ. Or les hyperplans invariants par σ sont les hyperplans par a et l'hyperplan $\Pi(a)$. La propriété souhaitée sera donc démontrée si l'on écarte la possibilité $\Pi(b) = \Pi(a)$, avec $a \notin \Pi(a)$. Ce cas a été écarté dans [12] grâce à l'hypothèse de non maximalité du défaut de Q. En fait, un raisonnement effectué dans [11] pour les quadrilatères généralisés peut être appliqué aux espaces de Shult, comme suit. Soient e_1 et e_2 deux points de Q sur une sécante par b; nécessairement $H_{e_1} \neq H_{e_2}$. Grâce à l'existence d'une perspectivité de centre b et axe $\Pi(b)$, l'intersection des hyperplans tangents H_{e_1} et H_{e_2} est la variété $H_{e_1} \cap \Pi(b)$. De plus, H_{e_1} et H_{e_2} ne contiennent pas a, puisque $e_1, e_2 \notin \Pi(a)$. Dès lors, puisque $b \notin H_{e_1}, H_{e_2}$, les hyperplans H_{e_1} et H_{e_2} rencontrent la droite $\langle a,b \rangle$ en deux points distincts c_1 et c_2, différents de a et b.
Comme la droite $\langle a,b \rangle$ est contenue dans l'hyperplan tangent de tout point de $Q \cap \Pi(a) = Q \cap \Pi(b)$, le collier Q_{c_1} contient tous les points de Q dans $\Pi(a) = \Pi(b)$. Mais $c_1 \in H_{e_1}$. Donc $\Pi(c_1) = P$ et, par l'hypothèse faite au départ, c_1 est un point défectif. Ceci contredit le fait que $c_1 \notin H_{e_2}$.

Nous avons ainsi prouvé que Π est une polarité de P dès que les seuls points a tels que $\Pi(a) = P$ sont les points défectifs de Q. Par la définition même de Π, Q est plongé dans cette polarité et dès lors, par le résultat de TITS [44], et en se référant à [7] pour le cas t=1, on a démontré le

THEOREME 2.3. Soit Q un espace de Shult non dégénéré projectif dans P tel que le collier Q_a d'un point a de P engendre P si et seulement si a est un point défectif de Q. Alors Q est une semi-quadrique dans P.

Grâce aux propositions 2.12 et 2.13, on obtient ainsi les

THEOREME 2.4. Soit Q un espace de Shult non dégénéré projectif dans P de rang $r \geq 3$. Alors Q est une semi-quadrique dans P.

THEOREME 2.5. Soient P un espace projectif fini et Q un espace de Shult non dégénéré dans P de rang $r \geq 2$. Alors Q est une semi-quadrique dans P.

Nous terminons le chapitre en signalant que THAS-DE WINNE [41] ont trouvé récemment une autre démonstration du fait qu'un quadrilatère généralisé non dégénéré projectif dans un espace fini est une semi-quadrique. Cette démonstration est basée sur divers résultats combinatoires, relatifs notamment aux sous-quadrilatères d'un quadrilatère généralisé et à la caractérisation des semi-quadriques (notamment [28] et [36]).

3. ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, n, q+1)

Dans ce chapitre, nous n'envisageons que des sous-structures d'incidence Q = $(\mathcal{P}(Q), \mathcal{L}(Q))$ de P telles que les droites de $\mathcal{L}(Q)$ sont les droites de P incluses à $\mathcal{P}(Q)$. La sous-structure d'incidence Q est alors entièrement déterminée par l'ensemble $\mathcal{P}(Q)$ de ses points : Q peut être définie comme un ensemble de points de P. Ce chapitre étudie donc certains sous-ensembles de points de P, que, par abus de notation, nous noterons Q. Ce qui précède permet d'adopter, à propos des sous-ensembles Q de P, les définitions du chapitre 1 relatives aux sous-structures d'incidence de P : par exemple, une *tangente* à Q est une droite de P qui rencontre Q en un seul point ou y est incluse, une *vraie tangente* à Q est une droite rencontrant Q en un seul point, une *sécante* à Q est une droite non contenue dans Q qui rencontre Q en plus d'un point, une *droite extérieure* à Q est une droite ne rencontrant pas Q.

Le chapitre 3 de notre travail est consacré aux sous-ensembles de P dont toutes les sécantes comprennent le même nombre de points de Q. L'étude systématique de tels ensembles de points peut se faire dans tout espace projectif. Elle n'a cependant été entreprise que dans les espaces projectifs finis [34] : certaines caractérisations des semi-quadriques finies ont ainsi été obtenues, par des méthodes combinatoires. On pourrait se demander si des résultats analogues ne peuvent être prouvés dans les espaces projectifs infinis (moyennant peut-être quelques hypothèses groupales), mais ce n'est pas l'objet de notre étude. Nos principaux résultats ne sont valables que dans les espaces projectifs finis. Seules les sections A et B ainsi que certains résultats de la section D peuvent être étendus aux espaces projectifs infinis; nous le signalerons lors de l'énoncé de ceux-ci.

Nous étudions donc certains sous-ensembles de points d'un espace projectif fini $P_d(q)$, où $q = p^h$ lorsque l'espace est arguésien. Nous adoptons la terminologie de G. TALLINI [34].

DEFINITION 3.1. Soit Q un ensemble de points de $P_d(q)$. L'ensemble Q est dit de *classe (0, 1, n, q+1)*, si toute droite de $P_d(q)$ rencontre Q en 0, 1, n, ou q+1 points. Conformément au chapitre 1, un tel ensemble Q est de classe (0, 1, n, q+1) *dans* $P_d(q)$ si $\langle Q \rangle = P$.

Dans la suite de ce chapitre, *q est supposé supérieur à 2*. Nous excluons le cas $q = 2$, car tout sous-ensemble de $P_d(2)$ est de classe (0, 1, 2, 3). Nous supposons également qu'*il existe une droite de* $P_d(q)$ *rencontrant Q en n points, avec* $2 \leqslant n \leqslant q$. En effet, les ensembles de classe (0, 1, q+1) sont les variétés linéaires de $P_d(q)$.

Nous examinons tout d'abord les ensembles dégénérés de classe (0, 1, n, q+1) et montrons que leur étude se ramène à celle d'ensembles non dégénérés. Ensuite, nous déterminons les ensembles de classe (0, 1, q, q+1). La troisième section étudie les ensembles de classe (0, 1, n, q+1), pour $3 \leqslant n \leqslant q-1$. Le cas $n = 2$ fait l'objet de la dernière section.

A. ENSEMBLES DEGENERES DE CLASSE (0, 1, n, q+1).

Cette section détermine les ensembles dégénérés de classe (0, 1, n, q+1), en les décrivant à partir des ensembles non dégénérés. Les arguments utilisés ne font pas appel à la finitude de l'espace projectif.

LEMME 3.1. Soient Q un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$ et S une variété linéaire de $P_d(q)$. Alors l'ensemble $S \cap Q$ est un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) de (non nécessairement dans) S.

La démonstration de ce lemme est immédiate.

THEOREME 3.1. Soit Q un ensemble dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$. Alors l'ensemble des points doubles de Q est une variété linéaire Δ de P. De plus, si S est une variété linéaire de $P_d(q)$ complémentaire à Δ, l'ensemble $S \cap Q$ est non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans S et Q est la réunion des droites $\langle a,b \rangle$ joignant un point a de Δ à un point b de S Q.

Démonstration.

1) Montrons que l'ensemble des points doubles de Q constitue une variété linéaire de P. Il suffit de montrer que, si a et b sont deux points doubles distincts de Q, alors tout point c de la droite $\langle a,b \rangle$ est un point double de Q. Comme a est un point double de Q, a est adjacent à b et donc c est un point de Q. Prouvons que c est adjacent à tout point de Q. Le point c est évidemment adjacent aux points de la droite $\langle a,b \rangle$. Considérons un point e de $Q - \langle a,b \rangle$. Puisque a est un point double, a est adjacent à e, c'est-à-dire la droite $\langle a,e \rangle$ est une droite de Q. Dès lors, comme b est un point double, b est adjacent à tout point de la droite $\langle a,e \rangle$ et donc le plan $\langle a,b,e \rangle$ est inclus à Q. Nous avons donc prouvé que c est adjacent à e, ce qui achève la démonstration du 1).

2) Prouvons que Q est la réunion des droites $\langle a,b \rangle$, où $a \in \Delta$ et $b \in S \cap Q$. Puisque Δ est l'ensemble des points doubles de Q, les droites $\langle a,b \rangle$ sont des droites de Q. Soit c un point de Q n'appartenant pas à Δ. Puisque Δ est l'ensemble des points doubles de Q, la variété linéaire $\langle c,\Delta \rangle$ est incluse à Q. Elle rencontre donc S, complémentaire à Δ, en un point $\bar{c} \in S \cap Q$. Dès lors, le point c appartient à la droite joignant $\bar{c}$ au point double $\langle c,\bar{c} \rangle \cap \Delta$, ce qui prouve le 2).

3) Par le lemme 3.1, $S \cap Q$ est un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ de S. Par le 2), $S \cap Q$ est de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans S. En effet, si $S \cap Q$ engendrait une variété linéaire propre S' de S, la réunion des droites $< a,b >$, pour $a \in \Delta$ et $b \in S \cap Q$, engendrerait la variété $< \Delta, S' >$, variété linéaire propre de P et Q n'engendrerait donc pas P.

4) Il reste à prouver que $S \cap Q$ est non dégénéré. Supposons, au contraire, que $S \cap Q$ possède un point double a : le point a est adjacent à tout point de $S \cap Q$. D'autre part, a est adjacent à tout point de Δ, puisque Δ est la variété des points doubles de Q. Soit b un point de $Q - (\Delta \cup S)$. La variété $< b,\Delta >$ est contenue dans Q et rencontre donc S en un point $\bar{b} \in S \cap Q$. Puisque a est un point double de $S \cap Q$, $a \sim \bar{b}$. Dès lors, tout point double de Q est adjacent aux points de la droite $< a,\bar{b} >$ et donc $< a,\bar{b},\Delta >$ est inclus à Q. De ce fait, $a \sim b$. En conclusion, nous avons montré que a est adjacent à tout point de Q, c'est-à-dire est un point double de Q; ceci contredit l'hypothèse que S est gauche à l'ensemble Δ des points doubles de Q.

THEOREME 3.1'. Soient Δ et S deux variétés linéaires complémentaires de $P_d(q)$. Si $\bar{Q}$ est un ensemble non dégénéré de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans S, alors la réunion Q des droites $< a,b >$ joignant un point a de Δ à un point b de $\bar{Q}$ est un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$, dont Δ est l'ensemble des points doubles.

Démonstration.

1) L'ensemble Q engendre $P_d(q)$ car $\bar{Q}$ engendre S, complémentaire à Δ.

2) Montrons que la variété des points doubles de Q est Δ. Il est clair que Δ est inclus à l'ensemble des points doubles de Q. Supposons que Q possède un point double a, n'appartenant pas à Δ. Dans ce cas, $< a,\Delta >$ est contenu dans la variété linéaire des points doubles de Q. Or, l'espace $< a,\Delta >$ rencontre S, complémentaire à Δ, en un point $\bar{a}$ de $\bar{Q}$. Ce point $\bar{a}$ est donc un point double de $\bar{Q}$, ce qui est impossible puisque $\bar{Q}$ est non dégénéré.

3) Il reste à prouver que Q est de classe $(0, 1, n, q+1)$. Soit A une droite de $P_d(q)$. Si A est incluse à Δ, la droite A est contenue dans Q. Si A rencontre Δ en un point a, elle est tangente à Q en a, puisque a est un point double de Q; elle rencontre donc Q en 1 ou q+1 points. Si A est gauche à Δ, la variété linéaire $< A,\Delta >$ rencontre S suivant une droite coupant $\bar{Q}$ en 0, 1, n ou q+1 points. Dès lors, $< A,\Delta >$ rencontre Q respectivement suivant Δ, un hyperplan de $< A,\Delta >$ par Δ, n hyperplans de $< A,\Delta >$ par Δ ou $< A,\Delta >$

lui-même. Il est alors clair que A rencontre Q suivant 0, 1, n ou q+1 points.

Les théorèmes 3.1 et 3.1' ramènent donc l'étude des ensembles de classe (0, 1, n, q+1) à celle des ensembles non dégénérés.

B. ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, q, q+1)

Cette section détermine les ensembles (dégénérés ou non) de classe (0, 1, n, q+1) pour n = q. Les ensembles de classe (1, q, q+1) ont été déterminés par M. TALLINI-SCAFATI [ ]; nous retrouvons, en particulier, son résultat. En fait, notre étude est *valable dans les espaces projectifs infinis, de dimension finie.*: les raisonnements ci-dessous s'appliquent aux ensembles Q de points de tout espace projectif de dimension finie, tels que toute droite sécante à Q comprend exactement un point n'appartenant pas à Q. La détermination de ces ensembles s'obtient par induction sur la dimension d de l'espace projectif.

Nous établissons tout d'abord quelques lemmes.

LEMME 3.2. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) dans $P_d(q)$ et soit a un point n'appartenant pas à Q. Si A est une droite extérieure à Q par a, alors, pour tout plan α par A, l'intersection $\alpha \cap Q$ est l'ensemble $\alpha - A$, à moins que $\alpha \cap Q$ n'engendre pas α.

Démonstration. Supposons que $\alpha \cap Q$ engendre α : il existe trois points linéairement indépendants b_1, b_2, b_3 de Q dans α. La droite $< b_1, b_2 >$ contient deux points de Q; elle en contient donc au moins q. Puisqu'elle rencontre A en un point c n'appartenant pas à Q, $< b_1\ b_2 >$ est une sécante à Q. Considérons les droites $< b_3, e >$, où $e \in A - \{c\}$. Chacune d'elles rencontre Q en au moins q points et, puisqu'elles rencontrent la droite A extérieure à Q, ce sont des sécantes à Q. De plus, la droite $< b_3, c >$ est également une sécante à Q : en effet, si $< b_3, c >$ était une tangente en b_3, toute droite B de α ne passant ni par b_3, ni par c couperait $< b_3, c >$ et A en deux points extérieurs à Q; B couperait donc Q en zéro ou un point. Or B rencontre q-1 des droites $< b_3, e >$ en q-1 points de Q. On a donc une contradiction, puisque q > 2. En conclusion, les seuls points extérieurs à Q dans α sont ceux de la droite A.

LEMME 3.3. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) dans $P_d(q)$ et soit a un point n'appartenant pas à Q. Si A_1 et A_2 sont deux tangentes à Q par a, en les points b_1 et b_2, alors l'intersection $< A_1, A_2 > \cap Q$ est contenue dans la droite $< b_1, b_2 >$.

Démonstration. La droite $< b_1, b_2 >$ est nécessairement sécante à Q. Soit $b_3 \neq b_1, b_2$ appartenant à $< b_1, b_2 > \cap Q$: l'existence de b_3 est assurée par l'hypothèse $q > 2$. Supposons, contrairement à la thèse, qu'il existe un point b_4 de $Q - < b_1, b_2 >$, dansle plan $< A_1, A_2 >$. Considérons la droite $< b_3, b_4 >$. Elle coupe Q en au moins q points. Or $< b_3, b_4 >$ rencontre les deux tangentes A_1 et A_2 en des points distincts n'appartenant pas à Q. Nous avons donc une contradiction, ce qui démontre le lemme.

LEMME 3.4. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) dans $P_d(q)$ et soit a un point n'appartenant pas à Q. Alors, le collier [1] *Q_a du point a engendre une variété linéaire propre de $P_d(q)$.*

Démonstration. Nous raisonnons par induction sur la dimension d de l'espace projectif.

1) Le lemme est trivial si $d = 1$

2) Si $d = 2$, le résultat découle du lemme 3.3, puisque Q est supposé engendrer $P_2(q)$.

3) Supposons le lemme vrai en dimension d; prouvons-le pour un ensemble Q dans $P_{d+1}(q)$. Supposons que Q_a engendre $P_{d+1}(q)$. Soit H un hyperplan engendré par des points $b_o, \ldots, b_d$ de Q_a et soit $b_{d+1} \in Q_a - H$. La droite $< a, b_{d+1} >$ rencontre H en un point $c \notin Q$. Par l'hypothèse de récurrence et puisque H est engendré par des points de Q_a, il existe $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ tel que $< b_i, c >$ soit sécante à Q. Dès lors, le plan $< a, b_i, c >$ contient trois points linéairement indépendants de Q : les points de $< b_i, c > \cap Q$ et le point b_{d+1}. Mais ce plan contient deux tangentes à Q par a, puisque b_i et $b_{d+1} \in Q_a$. Ceci contredit le lemme 3.3.

Nous pouvons maintenant décrire les ensembles de classe (0, 1, q, q+1) de $P_d(q)$ à partir des ensembles de classe (0, 1, q, q+1) des espaces projectifs de dimension inférieure.

THEOREME 3.2. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) dans $P_d(q)$. Alors Q est la réunion du complément d'une variété linéaire propre S de $P_d(q)$ et d'un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) de (non dans) S.

---

1) Voir définitions du chapitre 1.

Démonstration. Nous raisonnons par induction sur la dimension de l'espace projectif, le théorème étant évidemment vrai en dimension 1. Pour prouver le théorème, il suffit de prouver que l'ensemble des points n'appartenant pas à Q engendre une variété linéaire propre S de P : en effet, par le lemme 3.1, les points de Q dans S sont ceux d'un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) de S; cet ensemble ne peut engendrer S, sinon, par l'hypothèse d'induction, les points extérieurs à Q engendreraient une variété linéaire strictement contenue dans S.

Nous pouvons supposer Q distinct de $P_d(q)$. Soit a un point n'appartenant pas à Q. Considérons un hyperplan H engendré par des points de Q et contenant le collier Q_a du point a, mais non a; l'existence de H est assurée par le lemme 3.4 et par le fait que Q engendre $P_d(q)$. L'ensemble $H \cap Q$ est donc de classe (0, 1, q, q+1) dans H. Par l'hypothèse d'induction, $H \cap Q$ est la réunion du complément d'une variété linéaire T dans H et d'un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) de T.

1) Montrons que, ou bien $< Q_a >$ est inclus à T, ou bien T est inclus à $< Q_a >$. Supposons, au contraire, qu'il existe un point b de Q_a non dans T et un point c de H extérieur à $H \cap Q$, n'appartenant pas à $< Q_a >$. La droite $< a,c >$ comprend deux points extérieurs à Q : elle est donc soit tangente soit extérieure à Q et, comme $Q_a \subset H$, la droite $< a,c >$ est extérieure à Q. Dès lors, par le lemme 3.2 et puisque $< a,b >$ est une vraie tangente à Q, l'ensemble $< a,b,c > \cap Q$ ne peut engendrer $< a,b,c >$. Or, par la définition de T, la droite $< b,c >$ est une droite sécante à Q. Donc, l'intersection $< a,b,c > \cap Q$ est l'ensemble des q points différents de c sur la droite $< b,c >$. Par conséquent, la droite $< b,c >$ est dans $< Q_a >$, ce qui contredit $c \notin < Q_a >$.

2) Si $< Q_a >$ est inclus à T, toute droite joignant a à un point de H extérieur à T est une sécante à Q. Par conséquent, l'ensemble des points n'appartenant pas à Q engendre la variété $S = < a,T >$ strictement contenue dans $P_d(q)$ et le théorème est démontré dans ce cas.

3) Si T est inclus à $< Q_a >$, toute droite joignant a à un point de H extérieur à $< Q_a >$ est une sécante à Q. Remarquons que $< Q_a >$ ne peut coïncider avec H, sinon Q n'engendrerait pas $P_d(q)$. Par conséquent, l'ensemble des points n'appartenant pas à Q engendre la variété linéaire $S = < a, Q_a >$, strictement contenue dans $P_d(q)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Comme toute réunion du complément d'une variété linéaire propre S de $P_d(q)$ et d'un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) de S est clairement un ensemble de classe (0, 1, q, q+1) dans $P_d(q)$, ce théorème détermine entièrement les ensembles de classe (0, 1, q, q+1) à partir de ceux de dimension inférieure. Mais les ensembles de classe (0, 1, q, q+1) de la droite projective $P_1(q)$ sont aisément classés : ce sont l'ensemble vide, un point, q points de $P_1(q)$ ou la droite elle-même. Par conséquent, nous avons ainsi déterminé, par induction, les ensembles de classe (0, 1, q, q+1) de $P_d(q)$.

De ce qui précède, on déduit, en particulier, la classification des ensembles de classe (1, q, q+1), obtenue par M. TALLINI-SCAFATI [36].

THEOREME 3.3. Soit Q un ensemble de classe (1, q, q+1) dans $P_d(q)$. Alors Q est la réunion du complément d'une variété linéaire propre S de $P_d(q)$ et d'un hyperplan de S.

Démonstration. Soient H et T comme définis dans la démonstration du théorème 3.2. Pour démontrer le théorème 3.3, il suffit de prouver que T est vide. Supposons, au contraire, qu'il existe un point c de H n'appartenant pas à $H \cap Q$. Alors, la droite $\langle a,c \rangle$ est extérieure à Q et Q n'est pas de classe (1, q, q+1).

C. ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, n, q+1) POUR $3 \leq n \leq q-1$

Cette section est consacrée aux ensembles de classe (0, 1, n, q+1), pour $3 \leq n \leq q-1$. Pour ces valeurs de n, M. TALLINI-SCAFATI a étudié les ensembles Q de classe (1, n, q+1) des espaces $P_d(q)$, avec $d \geq 2$ et $q > 2$. Elle classe ces ensembles pour d = 2 [35] et annonce [36] que, si $d \geq 3$ et $q > 4$, l'ensemble Q est une quadrique hermitienne ou un cône "projetant", à partir d'une variété linéaire de dimension d-3, un ensemble plan de classe (1, n, q+1). Toutefois, nous avons relevé une lacune dans la démonstration de ce résultat : une partie du raisonnement n'est valable que si $n \neq 2^{h-1} + 1$. Ecarter cette hypothèse ne paraît pas immédiat; il semble donc qu'il faille remplacer la condition $q > 4$ par une condition plus forte, par exemple $n \neq 2^{h-1} + 1$ c'est-à-dire $n \neq \frac{q}{2} + 1$ lorsque q est pair. (Nous verrons plus loin d'autres conditions suffisantes). L'étude du cas $n = \frac{q}{2} + 1$, q pair, reste à faire. Cette étude a été entreprise par RUSSO [28] pour le cas n = 3, q = 4 (écarté par M. Tallini-Scafati). Elle en déduit que, si Q est un ensemble de classe (1, n, q+1) non dégénéré, de cardinal suffisamment grand dans $P_d(4)$, alors Q est une quadrique hermitienne. Malheureusement, le travail de Russo est influencé par celui de M. Tallini-Scafati et, de ce fait, ce dernier résultat n'est valable, a priori, que pour une partie des ensembles de classe (1, n, q+1) dans $P_d(4)$. Nous préciserons plus loin la portée réelle de son théorème (remarque 3.3).

Dans cette section, nous tentons de généraliser les résultats ci-dessus aux ensembles de classe (0, 1, n, q+1) d'un espace projectif de dimension au moins 3; nous retrouvons, en corollaire, les résultats "affaiblis" de M. Tallini-Scafati et Russo. Notre méthode de démonstration est essentiellement différente de celle utilisée par M. Tallini-Scafati : elle est basée sur l'étude des espaces de Shult faiblement projectifs (chapitre 2).

a) LES ENSEMBLES PLANS.

Ce paragraphe rassemble divers résultats relatifs aux ensembles K de classe (0, 1, n, q+1), avec $3 \leq n \leq q-1$, d'un plan projectif fini $P_2(q)$ d'ordre q quelconque. Les résultats que nous mentionnons, proviennent tous de la littérature; ils sont utilisés dans la suite de notre exposé. Nous traitons d'abord les ensembles K ne contenant pas de droites de $P_2(q)$, ensembles appelés également $\{k,n\}$ - arc réguliers, où k est le cardinal de K. Ensuite, nous donnons la classification des ensembles K contenant une droite de $P_2(q)$.

1) Les $\{k,n\}$ - arcs réguliers de $P_2(q)$.

La notion de $\{k,n\}$ - arc est due à BARLOTTI [2]: un $\{k,n\}$ - *arc* est un ensemble K de k points d'un plan projectif fini $P_2(q)$ contenant n points alignés, mais n'en contenant pas n+1. Selon la terminologie de [35], le *type* d'un $\{k,n\}$ - arc K est l'ensemble des entiers i tels qu'il existe une droite de $P_2(q)$ rencontrant K en exactement i points. Il est facile de voir que $k \leq (n-1)(q+1) + 1$. Un $\{(n-1)(q+1) + 1, n\}$ - arc est appelé *arc maximal*. Il est clair que les $\{k,n\}$ - arcs maximaux sont les arcs de type $(0,n)$. Un $\{k,n\}$ - arc est dit *régulier*, si toute droite du plan le rencontre en 0, 1 ou n points. Les $\{k,n\}$ - arcs réguliers sont donc les ensembles de classe $(0, 1, n)$ du plan. Nous n'envisageons ci-dessous que les $\{k,n\}$ - arcs réguliers pour $3 \leq n \leq q-1$, le cas n=2 faisant l'objet de la section D.

Diverses limitations ont été obtenues sur le cardinal de ces $\{k,n\}$ - arcs réguliers : BARLOTTI [2], HUBAUT [21], WILSON [46]. Mais, en fait, peu de résultats généraux (voir par exemple [4]) sont connus à leur sujet; ce sont les arcs de type $(0,n)$ et de type $(1,n)$ qui ont fait l'objet des principales recherches.

Les $\{k,n\}$ - arcs de type $(0,n)$

Ces arcs K sont les arcs maximaux : leur cardinal vaut $k = (n-1)(q+1)+1$. Soit a un point n'appartenant pas à K. Toute droite par a qui rencontre K coupe K en n points. Donc k est divisible par n, ce qui donne $n \mid q$. Cette condition de divisibilité constitue une *condition nécessaire d'existence d'un arc de type $(0,n)$.*

DENNISTON [17] a prouvé que cette condition était suffisante dans les plans arguésiens d'ordre pair. THAS [39] a également construit des arcs maximaux dans les plans de Lüneburg d'ordre 2^{2m}.

Mais lorsque q est impair, cette condition d'existence n'est nullement suffisante. COSSU [15] a prouvé la non existence de $\{21, 3\}$ - arcs dans le plan arguésien d'ordre 9. THAS [40] a généralisé ce résultat en montrant qu'il n'existe pas de $\{2q + 3, 3\}$ - arcs dans les plans arguésiens d'ordre $q = 3^h$ $(h > 1)$. Dans le même article, Thas conjecture la non existence d'arcs maximaux dans tout plan arguésien d'ordre impair.

Les {k,n} - arcs de type (1,n)

Ces {k,n} - arcs sont étudiés par M. TALLINI-SCAFATI [35] (dans tout plan $P_2(q)$ tel que $q = p^h$). Elle donne une borne inférieure et une borne supérieure pour le cardinal de ces ensembles. Elle détermine la nature des ensembles dont le cardinal vaut une de ces deux valeurs extrêmes et montre ensuite qu'il ne peut exister de {k,n} - arc de type (1,n) pour k compris strictement entre ces deux valeurs. Elle prouve ainsi le

THEOREME 3.4. Soit K un {k,n} - arc de type (1,n) dans un plan projectif d'ordre $q = p^h$. Alors q est un carré, $n = \sqrt{q} + 1$ et K est l'un des suivants :
(i) un $\{q + \sqrt{q} + 1, \sqrt{q} + 1\}$ - arc, c'est-à-dire un sous-plan de Baer du plan
(ii) un $\{q\sqrt{q} + 1, \sqrt{q} + 1\}$- arc, c'est-à-dire un unital du plan.

Une classification des sous-plans de Baer et unitaux des plans non arguésiens est sans espoir. La situation n'est pas la même dans les plans arguésiens. Les sous-plans de Baer des plans arguésiens $P_2(q)$ sont déterminés : ce sont les plans projectifs d'ordre $\sqrt{q}$ sur le corps GF $(\sqrt{q})$. Par contre, les unitaux des plans arguésiens de $P_2(q)$ ne sont pas classés. Un exemple en est donné par l'ensemble des points absolus d'une polarité hermitienne, que nous appellerons *conique hermitienne* ou *unital hermitien*. Une autre famille d'unitaux a été obtenue par METZ [24] dans tout plan arguésien d'ordre q carré. Leur construction est inspirée de celle de BUEKENHOUT [9] qui a décrit des unitaux dans certains plans de translation non arguésiens ainsi que des unitaux non hermitiens des plans arguésiens d'ordre pair. Ce sont là les seuls unitaux non hermitiens connus dans un plan arguésien.

Donnons une description brève des unitaux de Metz. Considérons un plan projectif arguésien $P_2(q)$, q carré, et soit $A_2(q)$ un plan affin que complète $P_2(q)$. Ce plan affin peut être représenté par un espace affin $A_4(\sqrt{q})$ muni, dans son hyperplan à l'infini H, d'un recouvrement (spread) Σ de droites [16] : les points de $A_2(q)$ correspondent aux points de $A_4(\sqrt{q})$, les droites de $A_2(q)$ sont les plans de $A_4(\sqrt{q})$ dont la droite à l'infini est une droite de Σ, les points à l'infini de $A_2(q)$ sont les droites de Σ. Désignons par $P_4(\sqrt{q})$ l'espace projectif complétant $A_4(\sqrt{q})$. Metz construit un unital U de $P_2(q)$, à partir d'un ensemble Q de $P_4(\sqrt{q})$ rencontrant l'hyperplan H suivant une droite de Σ. Soit Γ une ellipse d'un plan de $A_4(\sqrt{q})$, qui ne correspond pas à une sous-droite de Baer de $A_2(q)$. Soit O un ovoïde d'un hyperplan de $A_4(\sqrt{q})$ tel que O contienne Γ et ait exactement un point à l'infini noté a'. Soit a $\neq$ a' un point de la droite A $\in \Sigma$ passant par a'. Considérons la réunion Q de la droite A et des droites $< a,b >$, où b est un point de O. Cet ensemble Q fournit dans $P_2(q)$ un unital U, qui n'est pas hermitien, du fait du choix de la conique Γ.

Suite à ces résultats, un problème naturel se pose : existe-t-il d'autres unitaux dans les plans arguésiens que ceux mentionnés ci-dessus ? Peut-on caractériser les unitaux hermitiens et les unitaux de Metz ? Une caractérisation des unitaux hermitiens est donnée par M. TALLINI-SCAFATI [35] . Notons toutefois que les conditions imposées dans cette caractérisation sont très fortes, rendant difficile l'utilisation du résultat. A la section D de ce chapitre, nous donnons, en application de résultats sur les ensembles de classe (0, 1, 2, q+1), une caractérisation des unitaux de Metz.

2) Les ensembles K contenant une droite.

Ces ensembles sont nécessairement des ensembles de classe (1, n, q+1). Ils ont été étudiés par M. TALLINI-SCAFATI [36] qui obtient le résultat suivant.

THEOREME 3.5. Si K est un ensemble de classe (1, n, q+1) de $P_2(q)$ qui contient une droite du plan, alors K est l'un des suivants :

(i) le plan $P_2(q)$

(ii) un faisceau de n droites concourrantes

(iii) la réunion d'un $\{(n-2)(q+1)+1,\ n-1\}$- arc K' (K' est un arc maximal) et d'une droite extérieure à K'

(iv) le complément d'un $\{(q-n)(q+1)+1,\ q-n+1\}$ - arc (qui est également un arc maximal).

La détermination de tels ensembles se ramène donc à celle d'arcs maximaux du plan. Or, comme nous l'avons vu, un arc maximal n'existe que si le cardinal de son intersection avec une droite sécante divise l'ordre du plan. Dès lors, un ensemble de type (iii) n'existe que si n-1 divise q. Par conséquent, si $q = p^h$, on a

(1) $n = p^{\ell} + 1 \qquad 0 < \ell < h$.

De même, un ensemble de type (iv) n'existe que si $q - n+1$ divise q. Par conséquent, si $q = p^h$, on a

$$q - n+1 = p^{\ell'} \qquad 0 < \ell' < h$$

On en déduit

(2) $n = p^{\ell'}(p^{h-\ell'}-1)+1 \qquad 0 < \ell' < h$

En comparant (1) et (2), nous constatons que, pour un n donné, $n \neq 2^{h-1} + 1$, il ne peut exister à la fois des ensembles de type (iii) et de type (iv). Mentionnons enfin que le cardinal d'un ensemble de type (iii) vaut $n\,q - q + n$, celui d'un ensemble de type (iv), $n\,q + n$ et qu'un ensemble de type (iv) ne possède aucune vraie tangente.

b) ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, n, q+1) ET ESPACES DE SHULT PROJECTIFS DANS $P_d(q)$ ($d \geq 3$).

Les ensembles de classe (0, 1, n, q+1) ne contenant aucune droite de $P_d(q)$, c'est-à-dire les ensembles de classe (0, 1, n), sont mal connus. Les seuls résultats les concernant (pour $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q-1$) sont, à notre connaissance, ceux de M. TALLINI-SCAFATI [37]. Remarquons toutefois que certains ensembles semi-quadratiques [12] ne contenant aucune droite de $P_d(q)$ sont de classe (0, 1, n); de ce fait, leur étude fournit des renseignements sur les ensembles de classe (0, 1, n).

Dans la suite de la section C, nous n'envisageons que des *ensembles Q de classe (0, 1, n, q+1) contenant une droite de $P_d(q)$*. Cette restriction sur l'ensemble Q est redondante si Q est de classe (1, n, q+1) dans $P_d(q)$, $d \geq 3$. Si $q > 4$, le résultat découle d'une démonstration de [36]; le cas $q = 4$ est traité séparément : des démonstrations différentes en sont données dans [28] et [37]. Nous reprenons ci-dessous la démonstration de [36] pour $q > 4$ et indiquons la méthode de [28] pour $q = 4$.

PROPOSITION 3.1. Soit Q un ensemble de classe (1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$ et $d \geq 3$. Alors Q contient au moins une droite de $P_d(q)$.

Démonstration. Supposons que Q ne contienne pas de droite. Soit S une variété linéaire de dimension 3 de $P_d(q)$ engendrée par quatre points linéairement indépendants de Q. L'intersection $\bar{Q} = S \cap Q$ est un ensemble de classe (1, n, q+1) dans S, ne contenant pas de droite. Nous allons montrer qu'un tel ensemble $\bar{Q}$ ne peut exister, en calculant de deux manières différentes le cardinal de $\bar{Q}$.

- Soit A une sécante à $\bar{Q}$ et α_i les plans de S par A. Par le théorème 3.4, toute section plane de $\bar{Q}$ est un unital ou un sous-plan de Baer. Dès lors,

$$|\bar{Q}| = \sqrt{q} + 1 + \lambda\ (q\sqrt{q} + 1 - \sqrt{q} - 1) + \mu\ (q + \sqrt{q} + 1 - \sqrt{q} - 1)$$

avec $\lambda + \mu = q + 1$. Donc

$$(3) \qquad |\bar{Q}| = \lambda\ (q\sqrt{q} - \sqrt{q} - q) + q^2 + q + \sqrt{q} + 1\ .$$

- Soit A' une tangente à Q et α_i' les plans de S par A'.
Grâce au théorème 3.4, on a

$$|\bar{Q}| = 1 + \ell\ (q\sqrt{q} + 1 - 1) + m\ (q + \sqrt{q} + 1 - 1)$$

avec $\ell + m = q + 1$. Donc

$$(4) \qquad |\bar{Q}| = \ell\ (q\sqrt{q} - q - \sqrt{q}) + q^2 + q\sqrt{q} + q + \sqrt{q} + 1\ .$$

De (3) et (4), on tire :

$$(\lambda - \ell)(q\sqrt{q} - q - \sqrt{q}) = q\sqrt{q}$$

ou $\qquad \lambda - \ell = \dfrac{q}{q - \sqrt{q} - 1}\ .$

On en déduit, puisque $q = p^h$, que $p^{h/2}\ (p^{h/2} - 1) - 1$ divise p^h, ce qui est impossible sauf si $p = 2$ et $h = 2$, c'est-à-dire si $q = 4$. Dans ce cas, $\lambda - \ell = 4$ et, dès lors, puisque par une droite de S il passe cinq plans, deux cas seulement sont possibles : ou bien $\lambda = 4$ et $\ell = 0$, ou bien $\lambda = 5$ et $\ell = 1$. Une analyse numérique de chacun de ces deux cas conduit à une contradiction (voir [28]).

Nous avons vu (chapitre 2) que les espaces de Shult projectifs (non dégénérés) 1) dans $P_d(q)$ sont des ensembles de classe (0, 1, n, q+1). Dès lors, le théorème 2.5 du chapitre 2 fournit un résultat sur les ensembles de classe (0, 1, n, q+1) : un ensemble (non dégénéré) 1) de classe (0, 1, n, q+1), avec $3 \leq n \leq q-1$, qui constitue un espace de Shult projectif dans $P_d(q)$ est une quadrique hermitienne. On peut alors se demander à quelle condition un

---

1) En fait ces conditions de non dégénérescence sont superflues grâce aux théorèmes 2.2 et 3.1 - 1'.

ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$, contenant une droite de $P_d(q)$, est un espace de Shult projectif dans $P_d(q)$. Par la définition même des espaces de Shult, un sous-ensemble de points (contenant une droite) de $P_d(q)$ est un espace de Shult si et seulement si toute section plane de cet ensemble, qui contient une droite de $P_d(q)$, est soit réduite à cette droite, soit une réunion de droites par un point, soit un plan. Or, toute section plane d'un ensemble Q de classe $(0, 1, n, q+1)$ est un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ (voir lemme 3.1) et donc, si une section plane de Q contient une droite de $P_d(q)$, cette section est l'un des ensembles décrit au théorème 3.5. Par conséquent, un ensemble Q de classe $(0, 1, n, q+1)$ est un espace de Shult projectif dans $P_d(q)$ si et seulement si Q ne possède aucune section plane des types (iii) ou (iv) du théorème 3.5. Dès lors, *si Q est un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$, avec $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q-1$, contenant une droite et ne possédant aucune section plane complément d'un arc maximal ou réunion d'une droite et d'un arc maximal, alors Q est quadrique hermitienne de $P_d(q)$.* Ainsi, si comme le conjecture Thas [40], il n'existe pas d'arcs maximaux dans un plan arguésien d'ordre impair, nous aurions prouvé que tout ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$ et q impair, est une quadrique hermitienne. La suite de notre travail consiste à approcher ce résultat, par une autre voie et sans hypothèse sur la parité de q, en étudiant les ensembles Q possédant une section plane de type (iii) ou (iv).

c) ENSEMBLES DE CLASSE $(0, 1, n, q+1)$ POSSEDANT UNE SECTION PLANE COMPLEMENT D'UN ARC MAXIMAL.

Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$ $(d \geq 3)$ rencontré par un plan suivant un ensemble K complément d'un $\{(q-n)(q+1) + 1, q - n+1\}$ - arc. C'est lors de l'étude des ensembles de classe $(1, n, q+1)$ possédant une telle section qu'une erreur s'est glissée dans le travail de M. TALLINI-SCAFATI. Nous en parlons dans la remarque 3.1 ci-après.

Nous avons vu (point a) de cette section) que le cardinal d'un tel ensemble K vaut $n q + n$, que K ne possède pas de vraie tangente et que l'existence de K implique

(2) $\qquad n = p^{\ell} (p^{h-\ell} - 1) + 1 \qquad\qquad$ avec $0 < \ell < h$.

On a vu également que, si $n \neq 2^{h-1} + 1$, il ne peut exister, pour la valeur (2) de n, un ensemble réunion d'une droite et d'un $\{(n-2)(q+1)+1, n-1\}$ - arc. Par conséquent, si $n \neq 2^{h-1}+1$, Q ne peut posséder de section de ce dernier type. Nous allons montrer, grâce à cette hypothèse, que Q est nécessairement dégénéré.

La démonstration de ce théorème nécessite deux propositions préliminaires.

PROPOSITION 3.2. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, possédant une section plane K complément d'un arc maximal. Alors Q possède une vraie tangente.

Démonstration. Supposons que Q ne possède pas de vraie tangente. Dans ce cas, par le théorème 3.5, toute section plane de Q contenant une droite est soit un plan, soit le complément d'un arc maximal. (Les ensembles de type (iii) sont exclus, car ceux-ci possèdent une vraie tangente). De plus, toute section plane de Q doit contenir une droite de $P_3(q)$: en effet, si Q était rencontré par un plan suivant un arc K', cet arc K' serait nécessairement maximal (K' ne peut posséder de tangente) et donc n divise $q = p^h$, ce qui contredit (2). Calculons de deux manières différentes le cardinal de Q.

- Soit A une sécante à Q et α_i les plans de $P_3(q)$ par A. Par ce qui précède, $\alpha_i \cap Q$ est le complément d'un arc maximal et donc

$$|Q| = n + (q+1)(n\,q + n - n) \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$(5) \qquad |Q| = n\,(q^2 + q + 1)\ .$$

- Soit A' une droite contenue dans Q et α_i' les plans de $P_3(q)$ par A'. Désignons par λ le nombre de plans α_i' contenus dans Q et par μ le nombre de plan α_i' rencontrant Q suivant le complément d'un arc maximal.

On a

$$|Q| = q + 1 + \lambda\,(q^2 + q + 1 - q - 1) + \mu\,(n\,q + n - q - 1)$$

avec $\lambda + \mu = q + 1$. Donc

$$(6) \qquad |Q| = (q+1)(n\,q + n - q) + \lambda\,(q^2 + q + 1 - n\,q - n)\ .$$

De (5) et (6), on tire

$$\lambda = \frac{n(q^2 + q + 1) - (q+1)(n\,q + n - q)}{q^2 + q + 1 - n\,q - n}$$

$$\lambda = \frac{q^2 + q - n\,q}{(q^2 + q - n\,q) - (n - 1)}$$

d'où $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1 - \dfrac{n-1}{q^2 + q - nq} = 1 - \dfrac{1}{q}\,\dfrac{n-1}{q - n + 1}$.

Or $q = p^h$, $n - 1 = p^\ell(p^{h-\ell} - 1)$ et $q - n + 1 = p^\ell$ avec $0 < \ell < h$.

Donc $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1 - \dfrac{p^{h-\ell} - 1}{p^h} = \dfrac{p^h - p^{h-\ell} + 1}{p^h}$

d'où $\quad p^h = \lambda\,[p^{h-\ell}\,(p^\ell - 1) + 1]$,

ce qui est impossible car $p^{h-\ell}\,(p^\ell - 1) + 1$ n'est pas divisible par p.

PROPOSITION 3.3. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q - 1$, possédant une section plane K complément d'un arc maximal et soit A une vraie tangente à Q. Si $q > 4$, alors un plan par A ne peut rencontrer Q suivant un arc dans ce plan.

Démonstration. Supposons qu'il existe un plan α par A coupant Q suivant un arc K' engendrant α. Désignons par a le point de tangence de A et soit B une droite sécante à K' ne passant pas par a. Les n droites $\langle a,b \rangle$, où $b \in B \cap K'$, sont des sécantes. Puisque chacune d'elles rencontre K' en n points, on a donc

$$n(n - 1) + 1 \leq |K'|$$

Mais l'arc K' admet une tangente en a. Donc, d'après un résultat de HUBAUT [21]

$$|K'| \leq q\sqrt{q} + 1 .$$

On en déduit

(7) $\quad n(n-1) \leq q\sqrt{q}$

d'où $\quad (p^h - p^\ell + 1)\,p^\ell(p^{h-\ell} - 1) \leq p^{h/2+h}$

$$(p^h - p^\ell + 1)\,(p^{h-\ell} - 1) \leq p^{h/2+h-\ell}$$

$$p^{2h-\ell} - 2\,p^h + p^\ell + p^{h-\ell} - 1 \leq p^{h/2+h-\ell}$$

d'où, en négligeant le terme positif $p^\ell + p^{h-\ell} - 1$,

$$p^{2h-\ell} < p^{h/2+h-\ell} + 2\,p^h$$

$$p^{h-\ell} < p^{h/2-\ell} + 2 \quad .$$

Posons $m = h-\ell$. On a $m \geq 1$. Comme $\frac{h}{2} - \ell \leq h - \ell - 1 = m - 1$, on obtient

$$p^m < p^{m-1} + 2 \qquad \text{avec } m \geq 1 .$$

$$p^{m-1}\,(p-1) < 2 \quad ,$$

ce qui ne peut être réalisé que si $p = 2$, $m = 1$, c'est-à-dire si $q = 2^h$ et $n = 2^{h-1} + 1$. Mais, pour ces valeurs, la condition (7) s'écrit

$$2^{h-1}\,(2^{h-1} + 1) \leq 2^{h/2+h}$$

$$2^{h-1} + 1 \leq 2^{h/2+1}$$

$$2^{h/2-2} + \frac{1}{h/2+1} \leq 1 \quad ,$$

ce qui ne peut être réalisé que pour $h < 4$, c'est-à-dire si $q = 4$, $n = 3$ ou si $q = 8$, $n = 5$.

Si $q = 8$ et $n = 5$, la condition (7) donne

$$21 \leq |K'| \leq 8.\sqrt{8} + 1$$

$$21 \leq |K'| \leq 23 \quad .$$

Or, comme K' est un $\{k,5\}$ - arc, $|K'| = 1 + \lambda\, 4$. Donc le cardinal k de K' vaut nécessairement 21. Calculons de deux manières différentes le nombre de paires $\{b,A\}$, où b est un point n'appartenant pas à K' et A une vraie tangente à K' en a, dans le plan $< K' >$.

- Le nombre de sécantes à K' par un point a de K' est 5; par conséquent, le nombre de tangentes à K' en a vaut 4. Le nombre total de tangentes à K' est donc $21.4 = 84$. Dès lors, le nombre de paires $\{b,A\}$ ci-dessus vaut $84.8 = 672$.

- Le nombre de points n'appartenant pas à K' est $73 - 21 = 52$. Mais par un point b n'appartenant pas à K', il passe μ tangentes à K' et $|K'| = \mu + 5\,\nu$; donc, puisque $|K'| = 21$ et $\mu \leq 9$, le nombre de tangentes à K' par b vaut 1 ou 6. Par conséquent, le nombre de paires $\{b,A\}$ ci-dessus vaut au plus $52.6 = 312$. On a ainsi obtenu une contradiction : il ne peut exister de $\{21,5\}$ - arc K', ce qui achève la démonstration du théorème.

N.B. Si $q = 4$, on trouve $|K'| = 7$ ou 9. Les arcs K' sont soit des sous-plans de Baer, soit des unitaux et il est facile de montrer que Q est nécessairement de classe $(1, n, q+1)$

THEOREME 3.6. Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$, avec $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q-1$, possédant une section plane K complément d'un arc maximal. Si $n \neq 2^{h-1} + 1$, alors Q est dégénéré et Q est la réunion des droites joignant les points de K aux points d'une variété linéaire de dimension $d-3$ gauche au plan de K.

Démonstration. 1) Prouvons le théorème pour $d = 3$. Soit A une vraie tangente à Q en un point a de Q. (L'existence de A découle de la proposition 3.2). Montrons que a est un point double de Q. Soit $B \neq A$ une droite par a. Considérons le plan $< A,B >$. Si $< A,B > \cap Q$ contient une droite de Q, alors, par le théorème 3.5, l'intersection $< A,B > \cap Q$ est un ensemble (ii) ou (iii), à moins qu'elle ne soit réduite à une droite. Or, nous avons vu que, pour un n donné, $n \neq 2^{h-1} + 1$, il ne peut exister à la fois des ensembles de type (iii) (iv). Donc $< A,B > \cap Q$ est nécessairement une droite ou un faisceau de n droites et donc B est tangente à Q. Si $< A,B > \cap Q$ ne contient pas de droites de Q, alors, par la proposition 3.2, l'ensemble $< A,B > \cap Q$ ne peut engendrer $< A,B >$. Si $< A,B > \cap Q$ se réduit au point a, alors B est évidemment tangente à Q. Supposons donc que $< A,B > \cap Q$ soit un ensemble de n points alignés. Comme la section K ne possède ni droite extérieure, ni vraie tangente, $< A,B >$ rencontre le plan de K suivant une sécante à Q qui n'est autre que $< A,B > \cap Q$. Dès lors, $a \in K$. Mais alors, par ce qui précède, toute droite par a non située dans le plan de K est une tangente. L'ensemble Q est donc la réunion de K et d'un faisceau de droites A_i par a. Un plan $< A_i, C >$, où C est une sécante à K par a, rencontre alors Q suivant la réunion de $C \cap Q$ et de droites par a. Or, par le lemme 3.1, $< A_i, C > \cap Q$ est de classe $(0, 1, n, q+1)$. Nous avons donc une contradiction avec le théorème 3.5.

2) Démontrons le théorème pour $d > 3$. Montrons que Q est dégénéré. Soit S une variété linéaire de $P_d(q)$ engendrée par K et un point de $Q-K$. Par la proposition 3.2, $S \cap Q$ admet dans S une vraie tangente A en un point a. Montrons que a est point double de Q. Supposons qu'il existe par a, une droite B de $P_d(q)$ sécante à Q. Par 1), cette droite ne peut être contenue dans la variété linéaire S. Considérons donc la variété linéaire S' engendrée par A, B et une sécante à K passant par le point $A \cap K$. Si l'ensemble $S' \cap Q$ comprend une section complément d'un arc maximal, alors, par 1), B ne peut être sécante. Il faut donc que $S' \cap Q$ ne contienne pas de section complément d'un arc maximal. Or, puisque $n \neq 2^{h-1} + 1$, Q ne peut posséder de section réunion d'une droite et d'un arc maximal. Par conséquent (voir paragraphe b) de cette section) $S' \cap Q$ est un espace de Shult projectif dans S', c'est-à-dire une quadrique hermitienne. Donc $n = \sqrt{q} + 1$, ce qui contredit la valeur (2) de n, pour $n \neq 2^{h-1}+1 (q \neq 4)$. Il reste à prouver que l'ensemble des points doubles de Q constitue une variété linéaire de dimension $d - 3$ complémentaire au plan de K. Ceci découle du théorème 3.1 et du fait que, pour toute variété linéaire S de dimension 3 par K, l'ensemble $S \cap Q$ comprend un point double de Q.

THEOREME 3.6'. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q-1$, possédant une section plane K complément d'un arc maximal. Si $q > 4$ et si Q ne possède pas de section plane réunion d'une droite et d'un arc maximal, alors Q est dégénéré et Q est la réunion des droites joignant les points de K aux points d'une variété linéaire de dimension d-3 gauche au plan de K.

Démonstration. La démonstration du théorème 3.6 ne nécessite l'hypothèse $n \neq 2^{h-1} + 1$ que pour assurer la non existence de section réunion d'une droite et d'un arc maximal et la validité de la proposition 3.3. Comme cette dernière est valable dès que q est supérieur à 4, on en déduit le théorème 3.6'.

En conclusion, les ensembles Q de classe (0, 1, n, q+1) possédant une section complément d'un arc maximal sont déterminés si $n \neq 2^{h-1} + 1$. Si $n = 2^{h-1} + 1$, le résultat du théorème 3.6 peut s'étendre, pour $q > 4$, aux ensembles Q qui ne possèdent pas de section plane réunion d'une droite et d'un arc maximal. La classification des ensembles possédant à la fois des sections complément d'un arc maximal et réunion d'une droite et d'un arc maximal, ainsi que l'étude du cas $q = 4$, ne sont pas réalisées (voir toutefois le N.B. de la proposition 3.3).

Nous terminons en examinant le résultat de M. TALLINI-SCAFATI [36] sur les ensembles Q de classe (1, n, q+1).

REMARQUE 3.1. M. Tallini-Scafati mentionne le résultat du théorème 3.6 pour les ensembles de classe (1, n, q+1), sans restriction sur n, ni sur q (proposition X de [36]). Mais la démonstration qu'elle en donne est incomplète : elle donne une preuve complète (analogue à celle que nous avons donnée ci-dessus) du fait que *tout ensemble de classe (1, n, q+1) dans $P_d(q)$, $d \geq 3$, qui possède une section K complément d'un arc maximal, mais ne possède pas de section plane réunion d'une droite et d'un arc maximal, est un cône projetant K à partir d'une variété linéaire de dimension d-3;* mais elle élimine abusivement, pour tout n, les sections réunions d'une droite et d'un arc maximal, par les relations (1) et (2) mentionnées au a) de cette section. En fait, elle n'a prouvé le résultat que pour $n \neq 2^{h-1} + 1$. Remarquons que cette condition peut se ramener à $q > 4$ si $n = \sqrt{q} + 1$. Or, un ensemble de classe (1, n, q+1) qui admet une section plane sans droite est, grâce au théorème 3.4, tel que $n = \sqrt{q} + 1$.

De plus, un ensemble dégénéré, décrit au théorème 3.6, n'admet pas de section plane sans droite. Dès lors, *si $q > 4$, un ensemble de classe $(1, n, q+1)$ de $P_d(q)$, $d \geq 3$, qui admet une section plane sans droite, ne peut admettre de section complément d'un arc maximal.*

d) ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, n, q+1) NE POSSEDANT PAS DE SECTION PLANE COMPLEMENT D'UN ARC MAXIMAL.

Ayant étudié les ensembles Q de classe $(0, 1, n, q+1)$ possédant une section plane complément d'un arc maximal, il nous reste, conformément au point b) de cette section, à envisager les ensembles Q dans $P_d(q)$, rencontré par un plan suivant la réunion d'un $\{(n-2)(q+1) + 1, n-1\}$ - arc K' et d'une droite extérieure à K'. Rappelons (voir point a) de cette section) que le cardinal d'une telle réunion vaut $nq - q + n$ et que son existence implique

(1) $\quad n = p^{\ell} + 1 \quad$ avec $0 < \ell < h$.

On en a déduit que, si $n \neq 2^{h-1} + 1$, Q ne peut posséder, en même temps, une section complément d'un arc maximal.

Rappelons également qu'il n'existe pas d'arc maximal, pour $n = 3$, dans un plan arguésien $P_2(3^h)$, $h > 1$ [40]. Par conséquent, en nous référant au b) de cette section, les ensembles de classe $(0, 1, 4, 3^h + 1)$ dans $P_d(3^h)$, qui ne possèdent pas de section plane complément d'un arc maximal, sont les quadriques hermitiennes. Nous avons ainsi une caractérisation des quadriques hermitiennes des espaces projectifs d'ordre 9.

THEOREME 3.7. Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, 4, 3^h + 1)$ dans $P_d(3^h)$, avec $d \geq 3$, $h > 1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Alors Q est une quadrique hermitienne dans $P_d(3^h)$ et donc $h = 2$.

En fait, ce paragraphe ne traite que des ensembles *Q ne possédant pas de section complément d'un arc maximal.* De plus, nous n'étudions que les ensembles *non dégénérés,* les ensembles dégénérés pouvant être déterminés grâce aux théorèmes 3.1-1'. Notre étude commence par celle des ensembles Q d'un espace projectif de dimension 3.

1) Ensembles Q dans un espace projectif $P_3(q)$.

Remarquons tout d'abord que, si Q est non dégénéré, Q ne peut contenir de plan de $P_3(q)$.

PROPOSITION 3.4. Soit Q un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section complément d'un arc maximal. Si Q contient un plan de $P_3(q)$, alors Q est dégénéré.

Démonstration. Ce résultat est prouvé par M. TALLINI-SCAFATI dans [36]. En effet, si Q contient un plan de $P_3(q)$, toute droite de $P_3(q)$ comprend au moins un point de Q et donc Q est de classe (1, n, q+1). On peut alors se référer à la démonstration de la proposition XI de [36].

La proposition suivante fournit des renseignements sur les ensembles Q dont toutes les droites sont concourantes, ensembles que nous écarterons dans la suite de notre travail.

PROPOSITION 3.5. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si toutes les droites de Q sont concourantes, alors $|Q| \leq (q+1)(nq + n - 2q) + \frac{q}{n-1}(q + 1 - n)$.

Démonstration. Soit a le point commun à toutes les droites de Q. Puisque Q est non dégénéré, il existe une droite B sécante à Q par a. Considérons les q+1 plans β_i de $P_3(q)$ par B. Par le théorème 3.5 et les conditions sur Q, un plan β_i contient au plus une droite de Q. Par conséquent, Q contient au plus q + 1 droites par le point a. Soit A une droite de Q par a et α_i les plans de $P_3(q)$ par A. Par le théorème 3.5 et les hypothèses faites sur Q, l'intersection $\alpha_i \cap Q$ est soit la droite A elle-même, soit la réunion de A et d'un arc maximal, soit un faisceau de n droites par a. Or, Q contient au plus q + 1 droites. Donc, il y a au plus $\frac{q}{n-1}$ plan α_i rencontrant Q suivant un faisceau de n droites par a. Par conséquent

$$|Q| \leq q+1 + \frac{q}{n-1}(n\,q + 1 - q - 1) + (q + 1 - \frac{q}{n-1})(n\,q + n - 2q - 1)$$

$$|Q| \leq (q+1)(n\,q + n - 2q) + \frac{q}{n-1}(q + 1 - n)\ ,$$

ce qui démontre la proposition.

Dans la suite du travail, nous supposons que *Q contient deux droites gauches*. Nous pouvons évaluer le cardinal de tels ensembles.

LEMME 3.5. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leqslant n \leqslant q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si Q contient deux droites gauches, alors
$|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + \lambda(q + 1 - n)$.

Démonstration. Soient A et B deux droites gauches de Q. Si α_i est un plan de $P_3(q)$ par A, le point $\alpha_i \cap B$ est un point b_i de Q n'appartenant pas à A. Par conséquent, tout plan α_i par A rencontre Q suivant un ensemble de classe (0, 1, n, q+1) dans α_i et donc (théorème 3.5 et hypothèses sur Q) $\alpha_i \cap Q$ est soit un faisceau de n droites, soit la réunion de A et d'un arc maximal. Dès lors,

$$|Q| = (q+1) + \lambda(n\,q + 1 - q - 1) + \mu(n\,q + n - 2q - 1)$$

où $\lambda + \mu = q + 1$, λ désignant le nombre de sections $\alpha_i \cap Q$ réunions de n droites par un point. D'où,

$$|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + \lambda(q + 1 - n)\ ,$$

ce qui démontre le lemme.

Nous prouvons maintenant un lemme qui permet de partitionner Q en trois types de points.

LEMME 3.6. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leqslant n \leqslant q-1$, ne possédant pas de section complément d'un arc maximal et contenant deux droites gauches. Alors, par un point de Q, il passe exactement 0, 1 ou n droites de Q, qui sont nécessairement coplanaires.

Démonstration. Si A et B sont deux droites de Q par un point a de Q, le plan $< A,B >$ rencontre Q suivant n droites par a. Pour prouver le lemme, il suffit donc de montrer qu'il ne peut passer par a, trois droites de Q non coplanaires. Supposons, au contraire, que A, B, C soient trois telles droites. Par hypothèse, Q est non dégénéré et contient une droite D ne passant pas par a. La droite D rencontre le plan $< A,B >$ en un point $b \neq a$ nécessairement adjacent à a. Nous pouvons supposer que $b \notin A$. (Dans le cas contraire, la droite B jouerait le rôle de A dans la suite du raisonnement). La droite D rencontre alors $< A,C >$

en un point $c \neq b$ adjacent à a. Par conséquent, Q contient trois droites coplanaires non concourantes : les droites $< a,b >$, $< a,c >$ et $< b,c >$, ce qui contredit les hypothèses du lemme (voir théorème 3.5).

DEFINITION 3.2. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal et supposons que Q contienne deux droites gauches. Nous disons qu'un point a de Q est un *point d'ordre 0, 1 ou n* selon que a appartient à 0, 1 ou n droites de Q. Nous désignons respectivement par $Q^{(o)}$, $Q^{(1)}$ et $Q^{(n)}$ les ensembles de points d'ordre 0, 1 et n.

A ce stade de notre étude, nous sommes amené à distinguer les ensembles Q, selon qu'ils contiennent ou non une droite rencontrée par toutes les autres droites de Q.

Ensembles Q contenant une droite A sécante à toutes les droites de Q.

Rappelons que nous supposons que Q contient deux droites gauches, les ensembles n'en contenant pas ayant été traités précédemment (proposition 3.5).

PROPOSITION 3.6. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si Q contient deux droites gauches et une droite A sécante à toutes les droites de Q, alors $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + (q+1 - n)$ et l'ensemble des droites de Q est la réunion de A et de faisceaux de n-1 droites concourantes en des points de A.

Démonstration. Puisque Q contient deux droites gauches B et C, nous pouvons nous référer au lemme 3.5 et $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + \lambda(q + 1 - n)$. Déterminons le paramètre λ. Ce paramètre est le nombre de sections planes de Q contenant B, qui sont réunions de n droites concourantes; λ est donc le nombre de points d'ordre n sur la droite B. Puisque A est rencontrée par toute droite de Q, la droite B rencontre A en un point a d'ordre n. Supposons que B comprenne un deuxième point $b \neq a$ d'ordre n. Soit $C \neq B$ une droite de Q par B. Puisque A rencontre toute autre droite de Q, C coupe A en un point c nécessairement distinct de a. Dès lors, Q contient trois droites coplanaires non concourantes : les droites A, B et C, ce qui contredit les hypothèses faites sur Q. Par conséquent $\lambda = 1$ et la proposition est démontrée.

Ensembles Q tels que, pour toute droite A de Q, il existe une droite B de Q gauche à A.

LEMME 3.7. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si, pour toute droite A de Q, il existe une droite B de Q gauche à A, alors le nombre de points d'ordre n appartenant à A est indépendant de A et vaut le paramètre λ introduit au lemme 3.5.

Démonstration. Soient A une droite de Q et B une droite de Q gauche à A. Par le lemme 3.5, on a $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + \lambda(q + 1 - n)$, où λ est le nombre de plan α_i par A rencontrant Q suivant n droites concourantes. Puisque, pour toute droite A de Q, il existe une droite B de Q gauche à A, ce résultat est valable pour toute droite de Q, ce qui montre que le nombre λ est indépendant de A. Or, λ est le nombre de points d'ordre n sur A : en effet, soient α_i et α_j deux plans distincts par A rencontrant Q suivant n droites concourantes respectivement en les points a_i et a_j de A; par le lemme 3.5, les points a_i et a_j sont distincts. Nous avons donc prouvé le lemme.

Ce lemme nous permet de prouver deux propriétés importantes de Q.

PROPOSITION 3.7. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si, pour toute droite A de Q, il existe une droite B de Q gauche à A et si $\lambda > 1$, alors la structure d'incidence, formée de l'ensemble $Q^{(n)}$ des points d'ordre n de Q et des droites de Q, constitue une quadrilatère généralisé faiblement projectif dans $P_3(q)$, dont le cardinal des droites est $s + 1 = \lambda$ et le nombre de droites par un point, $t + 1 = n$.

Démonstration. Montrons que l'ensemble $Q^{(n)}$, muni des "traces" des droites de Q, satisfait aux conditions (1), (2) et (3) de la définition 2.1 (chapitre 2).
(1) Soit $a \in Q^{(n)}$ et A une droite de Q ne comprenant pas a. Considérons le plan α des n droites de Q par a. Ce plan est rencontré par A en un point b adjacent à a. Le point b appartient donc à deux droites de Q : la droite

$< a,b >$ et la droite B. Le point b appartient donc à $Q^{(n)}$ et par conséquent a est adjacent à exactement un point de $A \cap Q^{(n)}$. La structure d'incidence donnée est donc un quadrilatère généralisé (espace de Shult de rang 2).
(2) Par le lemme 3.5, la variété linéaire $< Q_a^{(n)} >$ engendrée par le voisinage de a dans $Q^{(n)}$ est un plan de $P_3(q)$.
(3) Si A et B sont deux droites de Q concourantes dans $P_3(q)$, le point $A \cap B$ appartient évidemment à $Q^{(n)}$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 3.8. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal et tel que toute droite de Q admet une droite de Q qui lui est gauche. Si Q admet une section plane réunion d'une droite A et d'un arc maximal K', alors par tout point de K', il passe au plus une droite de Q.

Démonstration. Par le lemme 3.7, la droite A comprend λ points d'ordre n. Si $\lambda = 0$, les droites de Q sont gauches deux à deux et la proposition est triviale. Si $\lambda > 0$, il existe un point a de A d'ordre n. Supposons, au contraire de la thèse, que K' comprenne un point b d'ordre n. On a $b \not\sim a$. Alors, par la proposition 3.7, les n droites de Q par b rencontrent les n droites de Q par a, en n points (un point sur chaque droite). Or A est une droite par a. Il existerait donc une droite de Q par b rencontrant A, ce qui est impossible par la nature de la section $< A,b > \cap Q = A \cup K'$.

Nous pouvons maintenant classer les ensembles Q étudiés dans ce paragraphe.

THEOREME 3.8. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si toute droite de Q admet une droite de Q qui lui est gauche, alors l'un des cas suivants est réalisé :

(i) $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q)$ et les droites de Q sont gauches deux à deux

(ii) $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + 2(q + 1 - n)$ et les droites de Q sont les n^2 droites de $P_3(q)$ joignant un point a_i de Q sur une sécante A à un point b_i de Q sur une sécante B gauche à A. Dans ce cas, $Q^{(o)}$ est nécessairement non vide.

(iii) $|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + (n-1)^2\,(q + 1 - n)$ *et les droites de* Q *sont les droites de* $P_3(q)$ *contenant les droites d'une quadrique hermitienne d'un sous-espace projectif d'ordre* $(n-1)^2$ *dans* $P_3(q)$*. Dans ce cas,* $Q^{(o)}$ *est nécessairement non vide.*

(iv) Q *est une quadrique hermitienne non dégénérée dans* $P_3(q)$*.*

Démonstration. Cette classification est basée sur les lemmes 3.5 et 3.7 qui précèdent.

1) Si $\lambda = 0$, les droites de Q sont gauches deux à deux et le cas (i) est réalisé.

2) Supposons $\lambda = 1$. Soient A une droite de Q et a un point d'ordre n sur A. Soit α le plan des n droites de Q par a. Si B est une droite de Q gauche à A, le point $b = B \cap \alpha$ est un point, distinct de a, adjacent à a. Le point b appartient donc à deux droites de Q : la droite B et la droite $\langle a,b \rangle$. Dès lors, la droite $\langle a,b \rangle$ comprend deux points d'ordre n : le point a et le point b, ce qui contredit $\lambda = 1$.

3) Supposons $\lambda = 2$. Par la proposition 3.7, $Q^{(n)}$ muni des "traces" des droites de Q constitue un quadrilatère généralisé faiblement projectif dans $P_3(q)$. Comme $\lambda = 2$, les droites de ce quadrilatère sont des droites de deux points et il est facile de voir que $Q^{(n)}$ muni de l'adjacence induite par les droites de Q est un graphe biparti complet de $2n$ points : l'ensemble des points de $Q^{(n)}$ se partitionne en deux classes de points $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{b_i\}_{i=1,\dots,n}$ telles que toute droite de $Q^{(n)}$ est une droite $\langle a_i,\ b_j \rangle$. Soit a_i un point d'une des classes de points de $Q^{(n)}$. Chacune des n droites de Q par a_i comprend exactement un point b_j de la deuxième classe de points de $Q^{(n)}$. Comme ceci est vrai pour tout point a_i de la première classe, les points b_i sont contenus dans l'intersection des plans des droites de Q par les divers points a_i : les points b_i sont les points de Q sur une droite B, sécante à Q. De même, les points a_i sont les points de Q sur une sécante A à Q. Ces droites A et B sont gauches, car sinon le plan $\langle A,B \rangle$ serait contenu dans Q. Pour achever la démonstration du (ii), il reste à prouver que $Q^{(o)}$ ne peut être vide. Si $Q^{(o)} = \emptyset$, alors Q est la réunion des droites $\langle a_i,\ b_j \rangle$ décrites ci-dessus et donc

$$|Q| = n^2(q-1) + 2n = n^2q - n + 2n\ .$$

Or, puisque $\lambda = 2$, le résultat du lemme 3.5 donne

$$|Q| = (n-2)q^2 + 2nq - n + 2\ .$$

On en déduit

$$(n-2)q^2 - n(n-2)q + n^2 - 3n + 2 = 0 .$$

Le réalisant de cette équation du second degré en q vaut

$$n^2(n-2)^2 - 4(n-2)(n^2 - 3n + 2)$$

ou $$(n-2)(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) = (n-2)^4 .$$

Dès lors, q étant l'une des racines de cette équation, on a

$$q = \frac{n(n-2) \pm (n-2)^2}{2(n-2)} = \frac{n \pm (n-2)}{2}$$

ce qui est impossible, car q ne peut valoir ni n-1 ni 1. Nous avons donc prouvé le (ii).

4) Supposons $\lambda > 2$. Dans ce cas, le quadrilatère généralisé faiblement projectif $Q^{(n)}$ (voir proposition 3.7) possède des droites d'au moins trois points. Par conséquent, les résultats du chapitre 2 peuvent être appliqués : par les théorèmes 2.1 et 2.5, $Q^{(n)}$ est une quadrique hermitienne dans un sous-espace projectif dans $P_3(q)$. L'ordre du sous-espace est donné par le cardinal des droites de $Q^{(n)}$: il vaut $\lambda - 1$. Par conséquent $\lambda - 1 = (n-1)^2$ et le cardinal de Q est déterminé par le lemme 3.5.

Si $\lambda = q+1$ (ce qui exprime que Q ne possède aucune section réunion d'une droite et d'un arc maximal), le sous-espace projectif de $P_3(q)$ coïncide avec $P_3(q)$ et Q est une quadrique hermitienne dans $P_3(q)$: le cas (iv) est réalisé.

Si $\lambda < q+1$, alors (iii) est réalisé. Nous allons montrer que, pour un tel ensemble Q, l'ensemble $Q^{(o)}$ des points d'ordre 0 ne peut être vide. Supposons que $Q^{(o)} = \emptyset$ et soit $A \cup K'$ une section plane de Q réunion d'une droite A et d'un arc maximal K'. D'après la proposition 3.8 et puisqu'on suppose $Q^{(o)} = \emptyset$, tout point de K' appartient à exactement une droite de Q. Or, toute droite de Q rencontre le plan de la section $A \cup K'$. Donc, le nombre de points de K' est égal au nombre de droites de Q ne s'appuyant pas sur A. Soit a un point d'ordre n de A. Toute droite de Q, ne comprenant pas a, rencontre l'une des n droites A_i de Q par a. Or, par le lemme 3.7, toute droite A_i comprend λ points d'ordre n, dont le point a, et ainsi une droite $A_i \neq A$ est rencontrée par exactement $(\lambda-1)(n-1)$ droites ne coupant pas A. Par conséquent, le nombre de droites de Q ne rencontrant pas A vaut $(\lambda-1)(n-1)^2$. Dès lors, puisque l'ordre de K' vaut $nq + n - 2q - 1$, on a :

$$(\lambda-1)(n-1)^2 = qn + n - 2q - 1$$

On en déduit [1] que $\frac{q(n-2) + n - 1}{(n-1)^2}$ est un entier, c'est-à-dire, puisque

---

1) Soulignons que ce résultat ne nécessite pas la connaissance de la valeur de λ découlant des théorèmes relatifs aux espaces de Shult faiblement projectifs.

$q = p^h$ et $n-1 = p^\ell$, $\frac{p^{h-\ell}(p^\ell-1)+1}{p^\ell}$ est un entier. Cette condition ne peut être réalisée, car le numérateur de l'expression n'est pas multiple de p.

Le théorème 3.8 permet de caractériser les quadriques hermitiennes d'un espace projectif de dimension 3. On en déduit notamment

COROLLAIRE 3.1. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si toute droite de Q admet une droite de Q qui lui est gauche et si Q ne comprend aucun point d'ordre zéro, alors Q est une quadrique hermitienne, à moins que Q ne soit réunion de droites gauches deux à deux.

Ceci découle directement du théorème 3.8.

Pour améliorer les résultats du théorème 3.8, il convient donc de classer les ensembles Q comprenant des points d'ordre zéro. Nous avons obtenu un résultat dans cette direction (voir ci-dessous), mais nous n'avons pu résoudre le problème : aucun argument combinatoire ne semble permettre une résolution générale de la question. Peut-être une étude numérique des ensembles Q correspondant à des valeurs particulières de n et q permettrait-elle d'avancer la question, mais nous n'avons pas entrepris un tel travail.

LEMME 3.8. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_3(q)$, avec $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section complément d'un arc maximal et tel que toute droite de Q admet une droite de Q qui lui est gauche. Si $a \in Q^{(o)}$ et $b \in Q^{(n)}$, alors tout point de $\langle a,b \rangle \cap Q$, distinct de b, appartient à $Q^{(o)}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un point $c \neq b$ de $\langle a,b \rangle \cap Q$ par lequel passe une droite A de Q. La droite A rencontre le plan des droites de Q par b en un point $e \sim b$. Donc e est adjacent à deux points de la droite $\langle a,b \rangle$: le point b et le point c. Dès lors, e est adjacent à tout point de $\langle ab \rangle \cap Q$, ce qui contredit l'hypothèse $a \in Q^{(o)}$.

COROLLAIRE 3.2. Si $n \geq q^{1/3} + 1$, alors il ne peut exister d'ensembles de type (iii) du théorème 3.8.

Démonstration. Supposons que Q soit du type (iii) du théorème 3.8; soit $a \in Q^{(o)}$

et A une droite de Q. Par le théorème 3.5, le plan $< a, A >$ rencontre Q suivant la réunion de A et d'un arc maximal K', puisque $a \in Q^{(o)}$. Par le lemme 3.8, les λ droites $< a, a_1 >$ joignant a à un point a_1 d'ordre n sur A sont des sécantes dont tous les points différents de a_1 appartiennent à $Q^{(o)}$. Donc K' contient au moins $\lambda(n-2) + 1$ points de $Q^{(o)}$. D'autre part, nous avons vu, au point 4) de la démonstration du théorème 3.7, que le nombre de droites de Q ne rencontrant pas A est $(\lambda-1)(n-1)^2$. Par conséquent, par la proposition 3.8, le nombre de points de K' est supérieur ou égal à la somme de ces deux nombres, c'est-à-dire

$$\lambda(n-2) + 1 + (\lambda-1)(n-1)^2 \leqslant n\,q + n - 2q - 1$$

$$\lambda(n^2 - n - 1) - n^2 + 2n \leqslant (n-2)q + n - 1$$

d'où
$$\lambda \leqslant \frac{(n-2)q}{n^2-n-1} + 1$$

$$\lambda - 1 \leqslant \frac{(n-2)q}{n^2-n-1} \quad .$$

Or, $\lambda-1 = (n-1)^2$. L'inégalité devient donc

$$(n-1)^2\,(n^2 - n - 1) \leqslant (n - 2)q$$

$$n^4 - 3n^3 + 2n^2 + n - 1 \leqslant (n-2)q$$

$$n^3(n-2) - n^2(n-2) + n - 1 \leqslant (n-2)q$$

$$n^3 - n^2 + \frac{n-1}{n-2} \leqslant q$$

$$n^3 - n^2 < q$$

ce qui s'écrit, puisque $q = p^h$ et $n-1 = p^\ell$,

$$(p^\ell + 1)p^\ell < p^h$$

$$1 + \frac{2p^\ell + 1}{p^{2\ell}} < p^{h-3\ell}$$

et donc $h - 3\ell > 0$, ce qui signifie $q > (n-1)^3$. Il n'existe donc d'ensemble Q du type (iii) que si $q > (n-1)^3$ et le corollaire est ainsi démontré.

2) Ensembles Q dans un espace projectif $P_d(q)$, $d > 3$.

Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $d > 3$ et $3 \leqslant n \leqslant q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. On peut caractériser les quadriques hermitiennes parmi ces ensembles Q, grâce aux résultats obtenus en dimension 3.

THEOREME 3.9. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $d > 3$ et $3 \leq n \leq q-1$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si Q ne possède aucune section de dimension 3 qui, soit comprend des points d'ordre zéro, soit est réunion de droites gauches, soit est réunion d'une droite A et de faisceaux de droites coplanaires par des points de A, alors Q est une quadrique hermitienne.

Démonstration. Par le point b) de cette section, il suffit de prouver que Q n'admet pas de section plane réunion d'une droite et d'un arc maximal. Supposons au contraire que Q possède une telle section $A' \cup K'$ et considérons les variétés linéaires S de dimension 3 de $P_d(q)$, passant par le plan de $A' \cup K'$. Par les hypothèses faites sur Q et les résultats obtenus en dimension 3, les intersections $S \cap Q$ ne peuvent être que des ensembles dégénérés dans S ou être réduites à $A' \cup K'$. Soient S_1 et S_2 deux variétés linéaires de dimension 3 par $A' \cup K'$, telles que $S_1 \cap Q$ et $S_2 \cap Q$ soient les cônes projetant $A' \cup K'$ à partir des points a_1 et a_2 respectivement. Alors $S_1 \cap Q$ et $S_2 \cap Q$ contiennent chacun un plan : le plan $< a_1, A' >$ et le plan $< a_2, A' >$. Considérons la variété linéaire $T = < a_1, a_2, A' >$; son intersection avec Q est soit T elle-même, soit un faisceau de n plans par A'. Supposons que S_1 et S_2 sont tels que T n'est pas inclus à Q : ceci est toujours possible, car sinon Q contiendrait un hyperplan de $P_d(q)$ par A' et Q serait alors dégénéré. Nous allons mettre en évidence une contradiction, en étudiant l'intersection avec Q de la variété linéaire de dimension 4 engendrée par S_1 et S_2. Par le choix de S_1 et S_2, cette variété rencontre Q suivant la réunion des n cônes projetant $A' \cup K'$ à partir de n points $a_1, \ldots, a_n$ situés dans les n plans de T $\cap$ Q. Ces n points appartiennent à la sécante $< a_1, a_2 >$, car chaque point a_i est adjacent à tout point b de K' et, par chaque point b de K', passent exactement n droites de Q : les n droites $< a_i, b >$, qui sont coplanaires; dès lors, les points a_i appartiennent à l'intersection des plans de ces droites. Soit B une sécante à K'. La variété linéaire de dimension 3 $< a_1, a_2, B >$ rencontre alors Q suivant la réunion des droites $< a_i, b_j >$, où $a_i \in < a_1, a_2 > \cap Q$ et $b_j \in B \cap Q$. Ceci contredit le point (ii) du théorème 3.8, affirmant qu'un tel ensemble doit admettre des points d'ordre zéro.

3) Les résultats de M. Tallini-Scafati et Russo.

Ce paragraphe étudie les ensembles de classe (1, n, q+1). Nous retrouvons, à partir de ce qui précède, les résultats démontrés par M. TALLINI-SCAFATI [36] et RUSSO [28]; une hypothèse doit toutefois être ajoutée à celles mentionnées par ces auteurs, comme nous l'avons expliqué au point c) de cette section

REMARQUE 3.2. Soit Q un ensemble de classe (1, n, q+1) dans $P_d(q)$, avec $d \geq 3$ et $3 \leq n \leq q-1$. Si $q > 4$ et si Q n'admet pas à la fois des sections planes complément d'un arc maximal et réunion d'une droite et d'un arc maximal, alors Q est une quadrique hermitienne ou est dégénéré.

Démonstration. Si Q possède une section plane complément d'un arc maximal, alors, par le c), Q est dégénéré. Si Q ne possède pas de section plane complément d'un arc maximal, alors nous pouvons utiliser les résultats des paragraphes 1) et 2) qui précèdent. Supposons Q non dégénéré. Il suffit de prouver le résultat pour d = 3, car alors, par le théorème 3.9, il sera valable pour d > 3. Nous référant à certaines propriétés préliminaires établies par M. TALLINI-SCAFATI [36], nous savons que n vaut $\sqrt{q} + 1$, que Q contient deux droites gauches de $P_3(q)$ ainsi que deux droites sécantes de $P_3(q)$. Par conséquent, pour arriver au résultat annoncé, il suffit de montrer que Q ne peut être des types (ii) ou (iii) du théorème 3.8, ni contenir de droite sécante à toutes les autres droites de Q.

1) Puisque $n = \sqrt{q} + 1$, Q ne peut être du type (iii) du théorème 3.8, grâce au corollaire 3.2.

2) Supposons que Q soit du type (ii). Soit a un point d'ordre zéro de Q. Par a, il passe nécessairement une tangente à Q, sinon Q serait maximal. Considérons les q+1 plans α_i de $P_3(q)$ par cette tangente. Aucun de ces plans ne peut contenir une droite de Q, puisque $a \in Q^{(o)}$. Par conséquent, puisque $\alpha_i \cap Q$ est un ensemble de classe (1, n, q+1).l'arc $\alpha_i \cap Q$ est soit un unital, soit un sous-plan de Baer (voir théorème 3.4). Dès lors, le cardinal de Q vaut

$$|Q| = 1 + \lambda(q\sqrt{q} + 1 - 1) + \mu(q + \sqrt{q} + 1 - 1)$$

avec $\lambda + \mu = q + 1$. Donc

$$|Q| = \lambda(q\sqrt{q} - q - \sqrt{q}) + q^2 + q\sqrt{q} + q + \sqrt{q} + 1 \,. \tag{8}$$

Or, d'après le théorème 3.8,

$$|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + 2(q + 1 - n)$$

c'est-à-dire, puisque $n = \sqrt{q} + 1$,

$$|Q| = q^2 \sqrt{q} - q^2 + 2q\sqrt{q} + 2q - \sqrt{q} + 1 \quad . \tag{9}$$

De (8) et (9), on tire

$$q^2 \sqrt{q} - 2q^2 + q\sqrt{q} + q - 2\sqrt{q} = \lambda(q\sqrt{q} - q - \sqrt{q})$$

$$q^2 - 2q\sqrt{q} + q + \sqrt{q} - 2 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1)$$

$$\sqrt{q}\,(q\sqrt{q} - 2q + \sqrt{q} + 1) - 2 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1)$$

$$\sqrt{q}\,[\sqrt{q}\,(q - \sqrt{q} - 1) - (q - \sqrt{q} - 1) + \sqrt{q}] - 2 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1) \ .$$

On en déduit que $\frac{q-2}{q-\sqrt{q}-1}$ est un entier ρ, c'est-à-dire

$$q - 2 = \rho(q - \sqrt{q} - 1)$$

Comme ρ ne peut valoir 1, on en tire

$$\sqrt{q} - 1 = (\rho - 1)(q - \sqrt{q} - 1) \ .$$

Par conséquent, $\sqrt{q} - 1 \geqslant q - \sqrt{q} - 1$, ce qui ne peut être réalisé que pour $q = 4$.

3) Il reste à éliminer les ensembles Q contenant une droite A sécante à toutes les autres droites de Q. Soit b un point de Q-A appartenant à une droite de Q. Soient B une vraie tangente à Q en b et β_i les q+1 plans de $P_3(q)$ par B. Il existe exactement un plan β_i contenant une droite de Q : le plan engendré par B et la droite de Q par b. Les autres plans β_i rencontrent Q suivant un unital ou un sous-plan de Baer. Par conséquent,

$$|Q| = (\sqrt{q} + 1)q + (\sqrt{q} + 1) - q + \lambda(q\sqrt{q} + 1 - 1) + \mu(q + \sqrt{q} + 1 - 1)$$

avec $\lambda + \mu = q$. Donc

$$|Q| = \lambda(q\sqrt{q} - q - \sqrt{q}) + q^2 + 2q\sqrt{q} + \sqrt{q} + 1 \quad . \tag{10}$$

Or, par la proposition 3.6,

$$|Q| = (q+1)(n\,q + n - 2q) + (q + 1 - n)$$

c'est-à-dire, puisque $n = \sqrt{q} + 1$,

$$|Q| = q^2 \sqrt{q} - q^2 + 2q\sqrt{q} + q + 1 \ . \tag{11}$$

De (10) et (11), on tire

$$q^2 \sqrt{q} - 2q^2 + q - \sqrt{q} = \lambda(q\sqrt{q} - q - \sqrt{q})$$

$$q^2 - 2q\sqrt{q} + \sqrt{q} - 1 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1)$$

$$\sqrt{q}(q\sqrt{q} - 2q + 1) - 1 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1)$$

$$\sqrt{q}\,[\sqrt{q}(q - \sqrt{q} - 1) - q + \sqrt{q} + 1] - 1 = \lambda(q - \sqrt{q} - 1) .$$

On en déduit que $\dfrac{1}{q - \sqrt{q} - 1}$ est un entier, ce qui n'est possible que si $q = 4$.
Le résultat de M. Tallini-Scafati est ainsi démontré.

Rappelons que les hypothèses faites dans l'énoncé de ce dernier théorème, sont satisfaites dès que $n \neq 2^{h-1} + 1$. Nous terminons en mentionnant les résultats de RUSSO [28].

REMARQUE 3.3. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe $(1, 3, 5)$ dans $P_3(4)$. Si Q ne possède pas de section plane complément d'un arc maximal, alors Q est une quadrique hermitienne ou est la réunion d'une droite A et de quatre faisceaux de droites coplanaires par quatre points de A.

REMARQUE 3.3'. Soit Q un ensemble non dégénéré de classe $(1, 3, 5)$ dans $P_d(4)$, $d \geq 3$, ne possédant pas de section plane complément d'un arc maximal. Si $|Q| > 10.4^{d-2} - 3$, alors Q est une quadrique hermitienne.

Ces résultats peuvent être déduits de la classification des ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$, mais cette démarche nécessite des raisonnements et calculs tout à fait analogues à ceux de Russo et nous ne les reprendrons pas ici.

e) CONCLUSION.

Nous avons vu que la non existence d'arcsmaximaux dans un plan d'ordre impair (conjecture de THAS [40]) implique que les ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P_d(q)$, q impair, qui contiennent une droite, sont les quadriques hermitiennes. Nous avons approché ce résultat en étudiant les ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ ne possédant pas à la fois des sections planes complément d'un arc maximal et réunion d'une droite et d'un arc maximal.

Si Q possède une section plane complément d'un arc maximal, alors Q est dégénéré, dès que $q > 4$. Le cas $q = 4$ n'est pas résolu.

Les ensembles Q ne possédant pas de section complément d'un arc maximal, sont classés dans les espaces projectifs de dimension 3, sans restriction sur n, ni sur q. On peut alors caractériser les quadriques hermitiennes.

L'étude des ensembles de classe (0, 1, n, q+1) possédant à la fois des sections complément d'un arc maximal et réunion d'une droite et d'un arc maximal, reste à faire. Ce cas ne peut se présenter que si $n = 2^{h-1} + 1$, c'est-à-dire si $n = \frac{q}{2} + 1$, q pair.

D. ENSEMBLES DE CLASSE (0, 1, 2, q+1)

Pour compléter l'étude des ensembles de classe (0, 1, n, q+1) dans $P_d(q)$, $d \geq 2$, il nous reste à étudier les ensembles de classe (0, 1, 2, q+1). En fait, de tels ensembles peuvent être définis dans un espace projectif quelconque (fini ou non) : ce sont les ensembles de Tallini, que nous avons introduits dans [23].

DEFINITION 3.3. Un ***ensemble de Tallini*** d'un espace projectif P est un ensemble Q de points de P tel que toute droite de P, non contenue dans Q, rencontre Q en au plus deux points. Si Q ne contient pas de droite, nous dirons que Q est un *arc*, ou une calotte selon que la dimension de P vaut 2 ou est supérieure à 2.

Cette section est consacrée à l'étude des ensembles de Tallini d'un espace projectif quelconque. Nous avons tenté de classer ces ensembles. N'ayant pu atteindre notre but que dans les espaces de dimension $d \leq 4$, nous nous sommes orienté vers la recherche de caractérisations des quadriques parmi les ensembles de Tallini. Nous avons ainsi obtenu une nouvelle caractérisation des quadriques des espaces projectifs finis ou non et nous avons amélioré des résultats connus, relatifs aux quadriques finies.

a) ETUDE GENERALE DES ENSEMBLES DE TALLINI.

Ce paragraphe fournit quelques résultats généraux relatifs aux ensembles de Tallini des espaces projectifs finis ou non; ces résultats vont paraître dans [23]. Nous classons les ensembles de Tallini des espaces projectifs de dimension $d \leq 4$ et construisons, dans les espaces de dimension quelconque, des familles d'ensembles de Tallini qui ne sont pas des quadriques.

1) Classification.

Une classification des ensembles de Tallini de la droite projective est triviale. Il est facile de classer les ensembles de Tallini d'un plan projectif.

PROPOSITION 3.9. Soit Q un ensemble de Tallini dans un plan projectif P.

Alors Q est l'un des suivants :

(i) un arc (en particulier une conique non dégénérée)

(ii) la réunion d'une droite et d'une variété linéaire de dimension 0 ou 1

non incluse à la droite

(iii) le plan P lui-même.

Nous donnons une classification des ensembles de Tallini d'un espace projectif P de dimension 3.

PROPOSITION 3.10. Soit Q un ensemble de Tallini dans un espace projectif P

de dimension 3. Alors Q est l'un des suivants :

(i) une calotte (en particulier une quadrique elliptique)

(ii) la réunion de deux droites gauches et de zéro, une ou deux droites gauches,

s'appuyant sur les deux premières

(iii) une quadrique réglée

(iv) la réunion d'un cône projetant, à partir d'un point a, un arc d'un plan [1)] *ne comprenant pas a, et d'une calotte* [1)] *K dont aucun point n'est coplanaire avec deux droites de Q et dont aucune paire de points n'est coplanaire avec une droite de Q*

(v) la réunion d'un plan et d'une variété linéaire de dimension 0, 1 ou 2 non contenue dans le plan

(vi) l'espace P lui-même.

Démonstration. Si Q ne contient pas de droite, alors *(i)* est réalisé. Supposons donc que Q contienne une droite. Trois cas peuvent se produire.

1) Supposons que Q contienne deux droites gauches A_1 et A_2, mais pas de plan de P. Nous allons montrer qu'alors Q est de l'un des types *(ii)* et *(iii)*. L'ensemble Q pourrait être formé exactement de A_1 et A_2, ensemble décrit en *(ii)*. Si Q comprend un point a_1 non dans $A_1 \cup A_2$, alors la droite B_1 passant par a_1

---

1) Cet arc (resp. cette calotte) ne doit pas nécessairement engendrer le plan (resp. P).

et rencontrant A_1 et A_2 est une droite de Q. La réunion $A_1 \cup A_2 \cup B_1$ constitue un ensemble de Tallini de type *(ii)*. Si Q contient trois droites A_1, A_2, B_1 comme ci-dessus et un point a_2 non situé sur ces droites, alors la droite B_2 par a_2 rencontrant A_1 et A_2 est une droite de Q. Cette droite ne peut rencontrer B_1 par la classification des ensembles de Tallini en dimension 2 (car nous supposons que Q ne contient pas de plan). La réunion $A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$ est à nouveau un ensemble de Tallini décrit en *(ii)*. Supposons enfin que Q contienne quatre droites A_1,A_2, B_1, B_2 comme ci-dessus et un point a_3 non situé sur ces droites. Alors les droites A_3 et B_3 par a_3 , rencontrant respectivement B_1, B_2 et A_1, A_2 , sont dans Q. Ces droites A_3 et B_3 doivent être gauches respectivement à A_1, A_2 et B_1, B_2. Par conséquent, toutes les droites s'appuyant sur A_1, A_2, A_3 (une réglée [1] $\mathcal{B}$) ainsi que toutes les droites s'appuyant sur B_1, B_2, B_3 (une réglée [1] $\mathcal{A}$) sont dans Q. Par [30], les ensembles de points de ces deux réglées coïncident si et seulement si le corps de base de P est commutatif et alors cet ensemble est une quadrique réglée de P. Nous obtenons ainsi le cas *(iii)*. Si le corps de base de P n'est pas commutatif, considérons un point a sur une droite de $\mathcal{B}$, n'appartenant à aucune droite de $\mathcal{A}$. Alors a $\notin$ B_1, B_2, B_3 par la définition de $\mathcal{A}$. La droite C par a rencontrant B_1 et B_2, est une droite de Q. Mais, par tout point de B_1, il existe une droite $A_1 \in \mathcal{A}$ rencontrant B_2. Par conséquent, comme Q ne contient pas de plan, C doit être une droite de $\mathcal{A}$, ce qui contredit le choix de a. Par conséquent, il n'existe pas d'ensemble de Tallini satisfaisant 1) et contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, lorsque le corps de base est non commutatif. Comme aucun ensemble de Tallini, distinct de P, ne peut contenir strictement une quadrique réglée, nous avons prouvé que seuls *(ii)* et *(iii)* peuvent être réalisés.

2) Si toutes les droites de Q sont concourantes en un point a, il est clair que *(iv)* doit être réalisé.

3) Si Q contient un plan α , considérons un point a n'appartenant pas à α. L'ensemble Q pourrait être $\alpha \cup \{a\}$. Si Q contient deux points distincts a_1 et a_2 n'appartenant pas à α, alors Q contient la droite $< a_1, a_2 >$. Comme la réunion $\alpha \cup < a_1, a_2 >$ est un ensemble de Tallini, Q pourrait coïncider avec cette réunion. Mais si Q contient trois points non alignés a_1, a_2, a_3 n'appartenant pas à α, alors considérons le plan $\alpha' = < a_1, a_2, a_3 >$. L'ensemble de Tallini $\alpha' \cap Q$ contient la droite $\alpha' \cap \alpha$ et les points non alignés a_1, a_2, a_3 . Dès lors, par la classification des ensembles de Tallini

---

1) Selon [30], nous appelons réglée ("regulus") la famille des droites de P s'appuyant sur trois droites gauches deux à deux.

du plan, α' est contenu dans Q. Par conséquent, Q contient la réunion $\alpha \cup \alpha'$. Celle-ci constitue un ensemble de Tallini dans P. Il est évident que si Q contient un point non situé dans α ni α', alors Q coïncide avec P. Nous avons ainsi prouvé que, si Q contient un plan, les cas *(v)* et *(vi)* sont réalisés et la proposition est démontrée.

Nous avons également pu déterminer les ensembles de Tallini des espaces projectifs de dimension 4. Toutefois la classification obtenue est fort longue et sa démonstration fastidieuse. Nous ne mentionnons pas ici ce résultat; il paraîtra d'ailleurs dans [23]. De plus, les principaux ensembles obtenus par cette classification sont décrits par les constructions générales que nous donnons ci-après.

2) Constructions.

Nous décrivons deux familles infinies d'ensembles de Tallini, dans les espaces projectifs quelconques (éventuellement de dimension infinie).

CONSTRUCTION 3.1. Considérons une famille (finie ou non) de paires $(P_i, Q_i)_{i\in I}$*, où* P_i *est une variété linéaire propre de* P *et* Q_i *une quadrique dans* P_i*, telle que*

(a) $< \bigcup_{i \in I} P_i > = P$.

(b) pour tout j*, la variété* P_j *n'est pas incluse à la variété* $< \bigcup_{i<j} P_i >$

(c) pour tout j*, l'intersection* $Q_j \cap < \bigcup_{i<j} P_i >$ *coïncide avec l'intersection*

$P_j \cap (\bigcup_{i<j} Q_i)$

Alors la réunion $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ *est un ensemble de Tallini dans* P*.*

Démonstration. La condition (a) entraîne $< Q > = P$. Il faut donc prouver que Q est un ensemble de Tallini. Soit A une droite de P non contenue dans Q. Si A est contenue dans une des variétés P_i, alors A rencontre nécessairement Q en au plus deux points. Si A n'est pas contenue dans une variété P_i, montrons que l'on a encore $|A \cap Q| = 2$, dès que A joint deux points de Q. Désignons par a_j et a_k ces deux points, avec j et k indices minimaux dans I tels que les quadriques Q_j et Q_k contiennent respectivement a_j et a_k. Supposons $j < k$. Alors, la droite A est contenue dans $< \bigcup_{i \leq k} P_i >$ et, puisque j et k sont minimaux, A rencontre $< \bigcup_{i < k} P_i >$ exactement en p_j (voir condition (b)). Mais

$Q \cap < \bigcup_{i \leq k} Q_i > = \bigcup_{i \leq k} Q_i$. Donc $A \cap Q = A \cap (\bigcup_{i \leq k} Q_i) = \{p_j, p_k\}$, ce

qui achève la démonstration.

REMARQUE 3.5. Cette construction permet de montrer que, si P_o est une variété linéaire propre de P et Q_o un ensemble de Tallini dans P_o, alors il existe un ensemble de Tallini Q dans P contenant Q_o. On en déduit une généralisation de la construction 3.1, en considérant des *paires* $(P_i, Q_i)_{i \in I}$, *où* Q_i *est un ensemble de Tallini dans* P_i.

REMARQUE 3.6. Si I est fini, alors l'ensemble de Tallini Q décrit ci-dessus est la réunion de deux ensembles de Tallini Q_1^* et Q_2^* dans des variétés linéaires propres P_1^* et P_2^* , tels que $< P_1^* , P_2^* > = P$ et $Q_1^* \cap P_2^* = Q_2^* \cap P_1^*$. En effet, il suffit de prendre $Q_1^* = \bigcup_{i \leq \ell} Q_i$ et $Q_2^* = \bigcup_{i > \ell} Q_i$ pour un certain $\ell \in I$; alors $P_1^* = < \bigcup_{i \leq \ell} P_i >$ et $P_2^* = < \bigcup_{i > \ell} P_i^* >$.

CONSTRUCTION 3.2. Soient S et T deux variétés linéaires complémentaires de P. Soit Q_o *un ensemble de Tallini dans S et soit* $K = \{a_i\}_{i \in I}$ *une calotte dans T. Considérons les variétés* $P_i = < S, a_i >$*, pour* $i \in I$*, et soit* Q_i *un ensemble de Tallini dans* P_i *tel que* $Q_i \cap S = Q_o$*. Alors* $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ *est un ensemble de Tallini dans P.*

Démonstration. L'existence des ensembles de Tallini Q_i découle de la remarque 3.5. On a clairement $< Q > = P$. Nous allons prouver que Q est un ensemble de Tallini. Soit A une droite non contenue dans P. Si A est incluse à une variété linéaire P_i, alors $|A \cap Q| = |A \cap Q_i| \leq 2$. Si A n'est pas incluse à une variété P_i, alors A rencontre exactement deux variétés P_i, sinon K ne serait pas une calotte. Par conséquent A rencontre Q en au plus deux points et la démonstration est achevée.

Remarquons que, si K est formé de deux points, la construction 3.2 fournit les mêmes ensembles que ceux décrits à la remarque 3.6.

Nous avons ainsi montré que les ensembles de Tallini des espaces projectifs P constituent une classe fort complexe de sous-ensembles de P, dont les quadriques ne sont qu'un cas particulier. Les résultats obtenus semblent indiquer qu'une classification de ces ensembles est sans espoir et nous nous sommes orienté vers la recherche de caractérisations des quadriques (voir point c) de cette section).

b) ARCS ET CALOTTES DES ESPACES PROJECTIFS FINIS.

Les ensembles de classe (0, 1, 2) des espaces projectifs finis $P_d(q)$ ont fait l'objet de nombreuses recherches. Selon la terminologie de SEGRE [31], ils sont appelés k-arcs, si $d = 2$, et k-calottes, si $d \geq 3$, où k désigne le cardinal de l'ensemble. Les principaux résultats relatifs à ces ensembles sont exposés dans [4] et [31]. Nous reprenons ci-dessous quelques résultats connus à leur sujet et utiles pour la suite. L'un de ces résultats nous permet de caractériser les unitaux de Metz, dont nous avons parlé à la section C.

Le cardinal k d'un arc K du plan vaut au plus $q+1$, si q est impair et $q+2$, si q est pair. Un arc K ayant un tel cardinal est appelé *arc maximal*. SEGRE [29] a prouvé que les arcs maximaux d'un plan projectif arguésien fini $P_2(q)$, avec q impair, sont les coniques non dégénérées. Des exemples d'arcs maximaux des plans d'ordre pair sont fournis par la réunion d'une conique et de son noyau, mais d'autres $(q+2)$-arcs ont été construits [31].

Mentionnons quelques résultats sur les calottes de $P_3(q)$. On peut montrer (voir par exemple QVIST [27]) que le cardinal d'une k-calotte de $P_3(q)$ vaut au plus $q^2 + 1$, pour tout $q > 2$. PANELLA [25] et BARLOTTI [1] ont alors prouvé un résultat analogue à celui démontré par Segre pour les arcs maximaux du plan : toute $(q^2 + 1)$-calotte de $P_3(q)$, q impair, est une quadrique elliptique. Ce résultat n'est plus valable si q est pair; on peut toutefois prouver que la réunion des tangentes en un point d'une telle calotte constitue un plan : Q est donc un ovoïde. Divers ovoïdes qui ne sont pas des quadriques ont été construits (TITS [42], [43]).

Des limitations sur le cardinal des calottes des espaces projectifs finis $P_d(q)$ ont été obtenues. Nous renvoyons le lecteur à SEGRE [31] pour les principaux résultats sur le sujet.

Grâce aux propriétés, rappelées ci-dessus, des $(q^2 + 1)$-calottesde $P_3(q)$ et en utilisant nos résultats de la proposition 3.10, nous donnons une caractérisation des unitaux de Metz décrits à la section C. Dans ce paragraphe, le plan projectif est donc supposé d'ordre carré; cet ordre sera noté q^2, pour simplifier l'écriture. La construction de Metz est inspirée de celle de BUEKENHOUT [9], fournissant des unitaux non hermitiens des plans arguésiens d'ordre pair.

DEFINITION 3.3. Soient U un unital d'un plan projectif arguésien $P_2(q^2)$ et D une tangente à U. Soient $P_4(q)$ l'espace projectif d'ordre q et dimension 4 et Σ le recouvrement de droites d'un hyperplan H de $P_4(q)$, correspondant au plan affin $P_2(q^2)$-D (voir section C). Nous disons que U est un *unital de Buekenhout-Metz* si l'ensemble Q déterminé par U dans $P_4(q)$ est un cône projetant un ovoïde d'un hyperplan H' de $P_4(q)$, tangent au plan $H \cap H'$ au point a', à partir d'un point $a \neq a'$ sur la droite A de Σ passant par a'. Remarquons que, par le théorème 2 de [9], les unitaux hermitiens de $P_2(q^2)$ sont des unitaux de Buekenhout-Metz.

La classe des unitaux de Buekenhout-Metz est caractérisée par le théorème suivant.

THEOREME 3.10. Soit U un unital d'un plan arguésien $P_2(q^2)$. Si U est rencontré par toute sous-droite de Baer 1) *de $P_2(q^2)$ en 0, 1, 2 ou q+1 points, alors U est un unital de Buekenhout-Metz.*

Démonstration. Soit D une tangente à U. Soient $P_4(q)$, H et Σ comme définis ci-dessus. Considérons l'ensemble Q déterminé par U dans $P_4(q)$. Puisque D est tangente à U, l'hyperplan H rencontre Q suivant une droite A de Σ.

1) Nous allons voir que Q est un ensemble de classe (0, 1, 2, q+1) dans $P_4(q)$. Soient a et b deux points de Q. Il suffit de montrer que la droite $\langle a,b \rangle$ rencontre Q exactement en les points a et b, à moins qu'elle n'y soit incluse. Si a et b sont dans H, alors, puisque $H \cap Q$ est la droite A de Σ, la droite $\langle a,b \rangle$ coïncide avec A, incluse à Q. Si l'un des points a ou b n'appartient pas à H, alors la droite $\langle a,b \rangle$ rencontre H en un point b'. Par ce point b', il passe exactement une droite B de Σ. Le plan $\langle a,b,B \rangle$ correspond alors à une droite E de $P_2(q^2)$ et la droite $\langle a,b \rangle$ de ce plan est une sous-droite de Baer de E. Par l'hypothèse faite sur U, cette sous-droite de Baer rencontre U en 0, 1, 2 ou q+1 points. Par conséquent, $\langle a,b \rangle$ rencontre Q en 0, 1, 2 ou q+1 points.

---

1) Une sous-droite de Baer du plan $P_2(q^2)$ est l'intersection d'un sous-plan de Baer de $P_2(q^2)$ avec une droite de $P_2(q^2)$ sécante au sous-plan.

Nous avons ainsi prouvé que Q est de classe (0, 1, 2, q+1).

2) Soit α un plan de $P_4(q)$ par la droite A, non inclus à H. Ce plan α correspond à une droite F de $P_2(q^2)$, sécante à U par le point $D \cap U$. Par conséquent, α rencontre Q en q points n'appartenant pas à A. Dès lors, puisque par le 1), Q est de classe (0, 1, 2, q+1), l'intersection $\alpha \cap Q$ est la réunion de deux droites. Nous avons ainsi montré que tout plan α par la droite A rencontre Q en deux droites sécantes, à moins que α ne soit contenu dans H, auquel cas $\alpha \cap Q = A$. Par conséquent, Q est réunion de droites s'appuyant sur A et ne contient aucun plan de $P_4(q)$ par A.

3) Montrons que Q possède un unique point double a sur la droite A, c'est-à-dire que toutes les droites de Q concourent en un même point a de A. Supposons, au contraire, qu'il existe deux droites C et C' de Q rencontrant A en deux points distincts c et c'. Les droites C et C' ne peuvent être coplanaires, sinon le plan $< A, C, C' >$ serait contenu dans Q, ce qui contredit 2). Dès lors, les droites C et C' engendrent une variété linéaire de dimension 3. Celle-ci rencontre Q suivant un ensemble de classe (0, 1, 2, q+1) qui contient les deux droites gauches C et C'. Par le 2), tout plan α par A dans $< C,C' >$ rencontre cet ensemble en deux droites, sauf si $\alpha = H \cap < C,C' >$, auquel cas α rencontre Q suivant la seule droite A. Ceci contredit la classification des ensembles de Tallini des espaces projectifs de dimension 3 (proposition 3.9). En conséquence, Q est réunion de droites par un point a de A.

4) Soit H' un hyperplan de $P_4(q)$ ne comprenant pas le point a. L'ensemble Q est le cône projetant $H' \cap Q$ à partir de a. L'ensemble $O = H' \cap Q$ est un ensemble de classe (0, 1, 2, q+1). Il ne peut contenir de droite : en effet, si O en contenait une, cette droite engendrerait avec a un plan contenu dans Q; ce plan doit alors rencontrer H suivant la droite $A = H \cap Q$ et il existerait un plan par A contenu dans Q, ce qui contredit 2). L'ensemble O est donc une calotte dans H'; elle rencontre le plan $H \cap H'$ en l'unique point $a' = H' \cap A$. Or, comme $|U| = q^3 + 1$, le cardinal de Q vaut $q^3 + q + 1$ (voir choix de la droite D permettant de construire $P_4(q)$ et Σ). Dès lors, puisque Q est le cône projetant O à partir de a, le cardinal de O vaut $q^2 + 1$. Grâce aux résultats sur les $(q^2 + 1)$-calottes d'un espace projectif de dimension 3, O est alors un ovoïde de H', tangent au plan $H \cap H'$ en le point a'. Le théorème est donc démontré.

Remarquons, pour terminer, que ce théorème reste valable pour les unitaux paraboliques des plans de translation d'ordre q^2, dont le noyau est d'ordre q (voir [9]).

C) CARACTERISATIONS DES QUADRIQUES.

Comme nous l'avons souligné au point a) de cette section, une étude générale des ensembles de Tallini semble difficilement réalisable. Il est alors naturel de s'orienter vers la recherche de caractérisations des quadriques; c'est l'objet de ce paragraphe. Nous abordons tout d'abord la question dans un espace projectif quelconque de dimension finie, puis nous étudions le cas des quadriques orthogonales finies.

1) Ensembles de Tallini et espaces de Shult.

BUEKENHOUT [7] a caractérisé les quadriques orthogonales non dégénérées des espaces finis ou infinis, par la notion d'ensemble quadratique : un ensemble quadratique dans P est un ensemble de Tallini Q dans P tel que la réunion des tangentes à Q en un point de Q est un hyperplan de P ou l'espace P lui-même; Q est donc un ensemble semi-quadratique [12] (voir aussi chapitre 2 de ce travail). Or, tout ensemble semi-quadratique contenant une droite est un espace de Shult projectif et inversément, lorsque P est de dimension finie. Dès lors, le résultat de Buekenhout montre qu'un ensemble de Tallini Q contenant une droite et vérifiant l'axiome de Shult est une quadrique, si Q est non dégénéré. Mais nous savons (voir par exemple le point b) de la section C) que Q est un espace de Shult projectif dans $P_d(q)$ si et seulement si toute section plane de Q contenant une droite de $P_d(q)$ est soit réduite à cette droite, soit réunion de droites concourantes, soit un plan. En conséquence, d'après la proposition 3.9, un ensemble de Tallini non dégénéré Q contenant une droite, est une quadrique si et seulement si Q ne possède pas de section plane réunion d'une droite et d'un point n'appartenant pas à la droite. On a donc prouvé le

THEOREME 3.11. Soit Q un ensemble de Tallini non dégénéré dans P, contenant une droite de P. Alors Q est une quadrique orthogonale dans P si et seulement si Q ne possède pas de section plane réunion d'une droite et d'un point n'appartenant pas à cette droite.

De ce théorème, on déduit une deuxième caractérisation des quadriques des espaces projectifs de dimension finie.

THEOREME 3.12. Soit Q un ensemble de Tallini réglé [1] *non dégénéré dans P. Alors Q est une quadrique orthogonale dans P si et seulement si, pour toute paire de droites gauches A et B de Q, il existe au moins 3 droites de Q s'appuyant sur A et B.*

Démonstration. La condition nécessaire est bien connue. Démontrons la condition suffisante. Supposons que Q ne soit pas une quadrique orthogonale; alors, par le théorème 3.11, Q possède une section plane réunion d'une droite E et d'un point $e \notin E$. Puisque Q est réglé, il existe une droite F de Q par le point e. Celle-ci est nécessairement gauche à E. La variété linéaire $\langle E,F \rangle$ est donc de dimension 3 et l'intersection $\langle E,F \rangle \cap Q$ est un ensemble de Tallini contenant deux droites gauches ainsi qu'une section plane réunion d'une droite et d'un point. Cet ensemble ne peut être que des types *(ii)* ou *(v)* de la proposition 3.10. Comme ces ensembles ne vérifient pas les hypothèses, le théorème est démontré.

2) Quadriques orthogonales finies.

Les seuls résultats relatifs aux ensembles de classe (0, 1, 2, q+1) dans $P_d(q)$, contenant une droite, sont, à notre connaissance, la détermination par M. TALLINI-SCAFATI [36] des ensembles de classe (1, 2, q+1) et les caractérisations des quadriques orthogonales, obtenues par G. TALLINI. Dans [32], G. TALLINI prouve que les ensembles non dégénérés de classe (0, 1, 2, q+1) de $P_d(q)$ dont le cardinal vaut au moins $q^{d-1} + q^{d-2} + \ldots + q+1$ sont essentiellement les quadriques orthogonales des espaces projectifs de dimension paire et les quadriques hyperboliques des espaces de dimension impaire. Les quadriques elliptiques de ces espaces échappent à cette caractérisation, car leur cardinal est inférieur à la borne ci-dessus.[2] G. TALLINI en donne une caractérisation particulière [33].

---

1) Un ensemble de Tallini Q est dit réglé si Q est réunion de droites (voir définition du chapitre 1).

2) Rappelons que le cardinal des quadriques des espaces projectifs de dimension paire, $d = 2t$, vaut $q^{d-1} + \ldots + 1$; les cardinaux des quadriques elliptique et hyperbolique des espaces de dimension impaire, $d = 2t+1$, valent respectivement $q^{d-1} + \ldots + 1 - q^t$ et $q^{d-1} + \ldots + 1 + q^t$.

Nous améliorons les résultats de G. TALLINI lorsque q est impair et supérieur 3 : dans ce cas, par le choix d'une borne plus petite que celle utilisée par Tallini dans son premier article, nous caractérisons en un théorème unique les trois types de quadriques finies, à l'exception toutefois des quadriques elliptiques en dimension 3 (dont le cardinal est supérieur à la borne choisie).

LEMME 3.8. Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, 2, q+1)$ dans $P_d(q)$, contenant un hyperplan H de $P_d(q)$. Alors Q est la réunion de H et d'une variété linéaire non contenue dans H.

Démonstration. Il suffit de prouver que la variété linéaire engendrée par les points de Q-H est contenue dans Q. Soient a et b deux points de Q-H. La droite $< a,b >$ rencontre l'hyperplan H en un point de Q distinct de a et b; elle est donc contenue dans Q. Dès lors, la fermeture linéaire des points de Q-H est contenue dans Q et le lemme est démontré.

LEMME 3.9. Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, 2, q+1)$ dans $P_d(q)$ contenant des variétés linéaires de dimension $d-2$, mais aucun hyperplan de $P_d(q)$. Supposons que q est impair. Si $|Q| > q^{d-1} + 2\, q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1$, alors Q est une quadrique orthogonale dégénérée.

Démonstration. Soit S une variété linéaire de dimension d-2 contenue dans Q. Considérons les hyperplans H_i de $P_d(q)$ contenant S. Par le lemme 3.8, chacun des hyperplans H_i rencontre Q suivant la réunion de S et d'une variété linéaire T_i. La dimension de T_i vaut au plus d-2, car Q ne contient pas d'hyperplan. Désignons par λ le nombre des hyperplans H_i tels que la variété T_i correspondante est de dimension d-2. On a alors

$$|Q| \leq q^{d-2} + q^{d-3} + \dots + 1 + \lambda\, q^{d-2} + \mu\, q^{d-3}$$

avec $\lambda + \mu = q+1$. D'où

$$|Q| \leq (\lambda+1)\, q^{d-2} + (q+2 - \lambda)\, q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1$$

$$|Q| \leq (\lambda+2)\, q^{d-2} - \lambda\, q^{d-3} + 2\, q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1 \quad .$$

Dès lors, si $|Q|$ est supérieur à $q^{d-1} + 2q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1$, on a

$$(\lambda+2)\, q^{d-2} - \lambda\, q^{d-3} > q^{d-1}$$

$$(\lambda+2)\, q - \lambda > q^2$$

$$\lambda(q-1) > q^2 - 2q \quad ,$$

d'où l'on tire $\lambda \geqslant q$. Montrons que si $\lambda = q$ ou $q+1$, Q est une quadrique.

1) Supposons que toutes les variétés linéaires T_i rencontrent S en une même variété linéaire U de dimension $d-3$. Considérons un plan α gauche à U. Chacune des $\lambda + 1$ variétés T_i et S rencontre α en $\lambda + 1$ points distincts. Puisque $\lambda \geqslant q$, $\alpha \cap Q$ contient au moins $q+1$ points. Or $\alpha \cap Q$ ne peut contenir de droite, sinon Q contiendrait un hyperplan de $P_d(q)$. Donc ces points constituent un arc dans α. Par conséquent, $\lambda = q+1$ et $\alpha \cap Q$ est une conique non dégénérée, puisque q est impair. On en déduit que Q est la quadrique projetant cette conique à partir de U.

2) Supposons qu'il existe deux variétés T_1 et T_2 rencontrant S en deux variétés U_1 et U_2 distinctes. Soit V une variété linéaire de dimension 3 gauche à $U_1 \cap U_2$. Les variétés S, T_1 et T_2 rencontrent V respectivement en les droites A, B_1 et B_2; les droites B_1 et B_2 sont gauches et la droite A s'appuie sur B_1 et B_2. Or tout plan T_i rencontre V suivant des droites rencontrant A. Dès lors, d'après la proposition 3.10, $V \cap Q$ est une quadrique réglée ou contient un plan. Ce dernier cas ne peut se présenter, sans quoi Q contiendrait un hyperplan de $P_d(q)$. Par conséquent, Q coïncide avec la quadrique dégénérée projetant la quadrique réglée $V \cap Q$ à partir de $U_1 \cap U_2$.

THEOREME 3.13. Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, 2, q+1)$ dans $P_d(q)$, avec $d \geqslant 3$, $q > 3$ et q impair. Si $|Q| > q^{d-1} + 2q^{d-3} + q^{d-4} + \ldots + 1$, alors Q est une quadrique orthogonale, à moins que Q ne contienne un hyperplan de $P_d(q)$.

Démonstration. La démonstration se fait par induction sur d.

1) Si $d = 3$, la classification obtenue à la proposition 3.10 montre que les seuls ensembles dont le cardinal est supérieur à $q^2 + 2$ sont, pour q impair et supérieur à 3, les quadriques réglées de $P_3(q)$, les quadriques dégénérées en un cône et des ensembles contenant un plan. Le théorème est donc démontré dans les espaces de dimension 3.

2) Supposons $d > 3$. Si Q ne contient pas de droite, $|Q| < q^{n-1} + 1$, par un résultat de G. TALLINI [32], et donc les ensembles considérés ici contiennent au moins une droite de $P_d(q)$. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que Q n'admet pas de section plane réunion d'une droite et d'un point (voir théorème 3.11). Supposons, au contraire, qu'il existe un plan α rencontrant Q suivant une telle réunion. Soit i $(2 \leqslant i \leqslant n-2)$ la dimension d'une variété linéaire S contenant α, qui rencontre Q suivant un ensemble de cardinal supérieur à $q^{i-1} + 2q^{i-3} + q^{i-4} + \ldots + 1$. Si toutes les variétés linéaires T

de dimension $i+1$, par S, sont de cardinal inférieur ou égal à $q^{i} + 2q^{i-2} + q^{i-3} + \dots + 1$, alors $|Q|$ est inférieur ou égal à $q^{d-1} + 2q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1$. En effet, en posant

$$|S \cap Q| = q^{i-1} + 2q^{i-3} + q^{i-4} + \dots + 1 + \lambda, \text{avec } \lambda > 0,$$

on obtient

$$|Q| \leq q^{i-1} + 2q^{i-3} + q^{i-4} + \dots + 1 + \lambda$$
$$+ (q^{d-i-1}+\dots+1)(q^{i}+2q^{i-2}+q^{i-3}+\dots+1-q^{i-1}-2q^{i-3}-q^{i-4}-\dots-1-\lambda)$$

$$|Q| \leq q^{i-1} + 2q^{i-3} + q^{i-4} + \dots + 1$$
$$+ (q^{d-i-1}+\dots+1)(q^{i}+2q^{i-2}-q^{i-1}-q^{i-3})-\lambda(q^{d-i-1}+\dots+q)$$

d'où l'on tire, en négligeant le terme en λ,

$$|Q| \leq q^{d-1} + 2q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1.$$

Par conséquent, puisque $|Q| > q^{d-1} + 2q^{d-3} + q^{d-4} + \dots + 1$, il existe un hyperplan H de $P_d(q)$ contenant α, qui rencontre Q suivant un ensemble de cardinal supérieur à $q^{d-2} + 2q^{d-4} + q^{d-5} + \dots + 1$. Par l'hypothèse d'induction, $H \cap Q$ est une quadrique ou contient un hyperplan de H. L'ensemble $H \cap Q$ ne peut être une quadrique, puisque sa section par α est réunion d'une droite et d'un point. Par conséquent, $H \cap Q$ contient un hyperplan de H, c'est-à-dire Q contient une variété linéaire de dimension $d-2$. Dès lors, le lemme 3.9 achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARLOTTI A. Un' estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo. Boll. Un. Mat. Ital. 10 (1955) 498-506.

[2] BARLOTTI A. Sui {k,n}-archi di un piano lineare finito. Boll. Un. Mat. Ital. 11 (1956) 553-556.

[3] BARLOTTI A. Una limitazione superiore per il numero di punti appartenienti a una k-calotta C(k,0) di uno spazio lineare finito. Boll. Un. Mat. Ital. 12 (1957) 67-70.

[4] BARLOTTI A. Some topics in finite geometrical structures. Lectures notes, Chapel Hill, North Carolina (1965).

[5] BARLOTTI A. Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro. Matematiche 21 (1966) 387-395.

[6] BOURBAKI N. Eléments d'histoire des mathématiques. Hermann 1969.

[7] BUEKENHOUT F. Ensembles quadratiques des espaces projectifs. Math. Z. 110 (1969) 305-318.

[8] BUEKENHOUT F. Characterizations of semi-quadrics : a survey. Atti Conferenza sulle Teorie Combinatorie. Roma (à paraître).

[9] BUEKENHOUT F. Existence of unitals in finite translation planes of order q^2 with kernel q. A paraître.

[10] BUEKENHOUT F. - HUBAUT X. Locally polar spaces and related rank 3 groups. J. Algebra (à paraître).

[11] BUEKENHOUT F. - LEFEVRE C. Generalized quadrangles in projective spaces. Arch. Math. 25 (1974) 540-552.

[12] BUEKENHOUT F. - LEFEVRE C. Semi-quadratic sets in projective spaces. J. Geometry 7 (1976) 17-42.

[13] BUEKENHOUT F. - SHULT E. On the foundations of polar geometry. Geometriae Dedicata 3 (1974) 155-170.

[14] CAMERON P.J. Partial quadrangles. Quart. J. Math. Oxford 26 (1975) 61-73.

[15] COSSU A. Su alcune proprietà dei {k,n}-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito. Rendic. Mat. 20 (1961) 271-277.

[16] DEMBOWSKI P. Finite geometries. Springer 1968.

[17] DENNISTON R.H.F. Some maximal arcs in finite projective planes. J. Comb. Theory 6 (1969) 317-319.

[18] DIEUDONNE J. La géométrie des groupes classiques. Springer 1955.

[19] HIGMAN D.G. Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs. Atti Conv. Geometria Combinatoria e sui Applicazioni. Perugia 1971.

[20] HIGMAN D.G. - Mc LAUGHLIN J.E. Rank 3 subgroups of finite symplectic and unitary Groups. J. angew. Math. 218 (1965) 174-189.

[21] HUBAUT X. Limitation du nombre de points d'un {k,n}-arc régulier d'un plan projectif fini. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. 48 (1970) 490-493.

[22] KANTOR W.M. Rank 3 characterizations of classical Groups. J. Algebra 36 (1975) 309-313.

[23] LEFEVRE C. Tallini sets in projective spaces. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. (à paraître).

[24] METZ R. On a class of unitals (à paraître).

[25] PANELLA G. Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito. Boll. Un. Mat. Ital. 10 (1955) 507-513.

[26] PERCSY N. An extension of a theorem of Buekenhout and Lefèvre on projective Shult Spaces (à paraître).

[27] QVIST B. Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sci. Fenn. n°134, 1-27.

[28] RUSSO A. Calotte hermitiane di un $S_{r,4}$. Ricerche Mat. Napoli 20 (1971) 297-307.

[29] SEGRE B. Sulle ovali nei piani lineari finiti. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. 17 (1954) 141-142.

[30] SEGRE B. Lectures on modern geometry. Cremonese, Roma 1961.

[31] SEGRE B. Introduction to Galois geometry. Atti Accad. Naz. Lincei Memorie 8 (1967) 133-236.

[32] TALLINI G. Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito. Ann. Mat. Pura Appl. 42 (1956) 119-164.

[33] TALLINI G. Caratterizzazione grafica della quadriche ellitiche negli spazi finiti. Rendic. Mat. 16 (1957) 328-351.

[34] TALLINI G. Problemi et risultati sulle geometrie di Galois. Relazione N.30. Istituto di Matematica dell'Universita di Napoli (1973) 1-30.

[35] TALLINI-SCAFATI M. Sui {k,n}-archi di un piano grafico finito,con particolare riguardo a quelli con due caratteri. Nota I, II. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. 40 (1966) 812-818, 1020-1025.

[36] TALLINI-SCAFATI M. Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{r,q}$. Rendic. Mat. 26 (1967) 273-303.

[37] TALLINI-SCAFATI M. Calotte di tipo (m,n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$. Atti Accad. Naz. Lincei Rendic. 53 (1973) 71-81.

[38] THAS J.A. On 4-gonal configurations.Geometriae Dedicata. 2 (1973) 317-326.

[39] THAS J.A. Construction of maximal arcs and partial geometries. Geometriae Dedicata 3 (1974) 61-74.

[40] THAS J.A. Some results concerning {(q+1)(n-1),n}-arcs and {(q+1)(n-1)+1,n}-arcs in finite projective planes of order q. J. Comb. Theory 19 (1975) 228-232.

[41] THAS J.A. - DE WINNE P. Generalized quadrangles in finite projective spaces. (à paraître).

[42] TITS J. Ovoïdes et groupes de Suzuki. Arch. Math. 13 (1962) 187-198.

[43] TITS J. Groupes simples et géométries associées. Proc. Intern. Congress Math 1962 Stockholm (1963) 197-221.

[44] TITS J. Buildings of spherical type and finite BN-pairs. Springer 1974.

[45] VELDKAMP F.D. Polar geometry I-V. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A62 (1959) 512-551; A63, 207-212 (Indag. Math. 21, 22).

[46] WILSON B.J. A note on {k,n}-arcs. Proc. Cambridge philos. Soc. 76 (1974) 57-59.