ULB UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

DI·fusion

Dépôt Institutionnel de l'Université libre de Bruxelles /
Université libre de Bruxelles Institutional Repository
Thèse de doctorat/ PhD Thesis

Citation APA:

Hême de Lacotte, S. (1987). *Calcul symbolique et l'opérateur de Laplace* (Unpublished doctoral dissertation). Université libre de Bruxelles, Faculté des sciences, Bruxelles.

Disponible à / Available at permalink : https://dipot.ulb.ac.be/dspace/bitstream/2013/213480/1/680effa8-3d2a-4225-bcb6-c0c6e156cac8.txt

(English version below)

Cette thèse de doctorat a été numérisée par l'Université libre de Bruxelles. L'auteur qui s'opposerait à sa mise en ligne dans DI-fusion est invité à prendre contact avec l'Université (di-fusion@ulb.be).

Dans le cas où une version électronique native de la thèse existe, l'Université ne peut garantir que la présente version numérisée soit identique à la version électronique native, ni qu'elle soit la version officielle définitive de la thèse.

DI-fusion, le Dépôt Institutionnel de l'Université libre de Bruxelles, recueille la production scientifique de l'Université, mise à disposition en libre accès autant que possible. Les œuvres accessibles dans DI-fusion sont protégées par la législation belge relative aux droits d'auteur et aux droits voisins. Toute personne peut, sans avoir à demander l'autorisation de l'auteur ou de l'ayant-droit, à des fins d'usage privé ou à des fins d'illustration de l'enseignement ou de recherche scientifique, dans la mesure justifiée par le but non lucratif poursuivi, lire, télécharger ou reproduire sur papier ou sur tout autre support, les articles ou des fragments d'autres œuvres, disponibles dans DI-fusion, pour autant que :

- Le nom des auteurs, le titre et la référence bibliographique complète soient cités;
- L'identifiant unique attribué aux métadonnées dans DI-fusion (permalink) soit indiqué;
- Le contenu ne soit pas modifié.

L'œuvre ne peut être stockée dans une autre base de données dans le but d'y donner accès ; l'identifiant unique (permalink) indiqué ci-dessus doit toujours être utilisé pour donner accès à l'œuvre. Toute autre utilisation non mentionnée ci-dessus nécessite l'autorisation de l'auteur de l'œuvre ou de l'ayant droit.

---------- **English Version** ----------

This Ph.D. thesis has been digitized by Université libre de Bruxelles. The author who would disagree on its online availability in DI-fusion is invited to contact the University (di-fusion@ulb.be).

If a native electronic version of the thesis exists, the University can guarantee neither that the present digitized version is identical to the native electronic version, nor that it is the definitive official version of the thesis.

DI-fusion is the Institutional Repository of Université libre de Bruxelles; it collects the research output of the University, available on open access as much as possible. The works included in DI-fusion are protected by the Belgian legislation relating to authors' rights and neighbouring rights. Any user may, without prior permission from the authors or copyright owners, for private usage or for educational or scientific research purposes, to the extent justified by the non-profit activity, read, download or reproduce on paper or on any other media, the articles or fragments of other works, available in DI-fusion, provided:

- The authors, title and full bibliographic details are credited in any copy;
- The unique identifier (permalink) for the original metadata page in DI-fusion is indicated;
- The content is not changed in any way.

It is not permitted to store the work in another database in order to provide access to it; the unique identifier (permalink) indicated above must always be used to provide access to the work. Any other use not mentioned above requires the authors' or copyright owners' permission.

BST D00019
Hême de Lacotte, Suzanne - 1987
Calcul symbolique et l opérateur de Laplace ...
SC- -TECH - - {003568613}

Thèse Annexe

La notion d'enveloppe introduite par KIYOKO NISHIZAWA est utile pour l'approximation de certaines fonctions sur certains compacts de $\mathbb{C}^n$.

D000179

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

CALCUL SYMBOLIQUE ET L'OPERATEUR DE LAPLACE

Thèse présentée en vue

de l'obtention du grade de

Docteur en Sciences

(Grade Scientifique)

Universite Libre de Bruxelles

00356861 3

Année académique 1986-1987

Mohammed HEMDAOUI

Reçu le 31-3-87

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

CALCUL SYMBOLIQUE ET L'OPERATEUR DE LAPLACE

Thèse présentée en vue

de l'obtention du grade de

Docteur en Sciences
(Grade Scientifique)

Année académique 1986-1987

Mohammed HEMDAOUI

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

FACULTE DES SCIENCES

L'épreuve publique pour l'obtention du grade scientifique de Docteur en Sciences de Monsieur HEMDAOUI, Mohammed, aura lieu le :

MERCREDI 03 JUIN 1987 A 14.30 HEURES

en la Salle 2.NO.906, Bâtiment N/O, 9e étage, Campus Plaine, Boulevard du Triomphe à 1050 - Bruxelles.

Monsieur HEMDAOUI présentera et défendra publiquement une dissertation originale intitulée :

"Calcul symbolique et l'opérateur de Laplace";

et une thèse annexe intitulée :

"La notion d'enveloppe introduite par KIYOKO NISHIZAWA est utile pour l'approximation de certaines fonctions sur certains compacts de $\mathbb{C}^n$".

Reçu le 31-3-87

A la memoire de ma mere, humble et honnete travailleuse

1928-1985

Je remercie particulièrement le Professeur L.WAELBROECK, qui m'a accueilli au sein du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles, qui m'a proposé le sujet, sa disponibilité, ses conseils et encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie le Professeur G.COEURE de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I (France), qui a guidé mes premiers pas de recherche, sa présence dans le Jury me fait un grand honneur.

Je remercie le Professeur I.CNOP de la Vrije Universiteit Brussel de l'intérêt qu'il porte à ce travail en acceptant de se joindre au Jury.

Je remercie également les Professeurs J.P.GOSSEZ, E.LAMI DOZO et L.LEMAIRE pour les discussions que j'ai eues avec eux pendant l'élaboration de ce travail.

Je remercie enfin Madame AELST N. qui a bien assuré la présentation dactylographique.

TABLE DES MATIÈRES

CHAP.O : GENERALITES SUR LES b-ALGEBRES

CHAP.I : LA b-ALGEBRE $\mathcal{C}_\delta(X)$

1°) Existence de la b-algèbre $\mathcal{C}_\delta(X)$

2°) Exemple $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$

CHAP.II : THEOREME DU CALCUL SYMBOLIQUE

1°) Définition des b-algèbres $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

2°) Calcul symbolique

3°) Produit tensoriel

CHAP.III : SURJECTION SUR $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

1°) Définition de la b-algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

2°) Surjection sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

3°) Isomorphisme entre $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Le but de notre travail est l'étude du calcul symbolique unidimensionnel Pour un opérateur régulier d'une b-algèbre A dont la croissance de sa résolvante près du spectre est contrôlée par une fonction lipschitzienne positive sur $\mathbb{C}$. Dans le cas particulier où l'opérateur a est l'opérateur de LAPLACE opérant ainsi que sa résolvante sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, nous obtenons les résultats suivants :

- Si f est une fonction de classe C^1 dans un secteur T_α contenant strictement $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour un certain entier naturel N

$$(H) \quad \sup_{T_\alpha} |f(t)| \delta_o^N(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{T_\alpha} \delta_o^N(t) \delta^{-m}(t) |\bar{\partial} f(t) \wedge dt| < +\infty, \forall m \geq 0$$

  Alors la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est de classe C^∞, tempérées ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^+$, pour la même filtration N c-à-d

  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \sup_{\mathbb{R}^+} |D^k f(x)| \delta_o^N(x) < +\infty$

- Réciproquement, si f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ tempérée ainsi que toutes ses dérivées pour la même filtration N alors f admet un relèvement $\tilde{f}$ de classe C^1 dans un secteur T_α contenant strictement $\mathbb{R}^+$, et vérifie (H).

Le calcul symbolique tenant compte de la croissance de la résolvante a été étudié par divers auteurs notamment par moi-même [3] , NGUYEN t.Hoc [5], C.WROBEL [8], et L.WAELBROECK [7] pour des opérateurs réguliers (un opérateur a d'une b-algèbre A est régulier si il existe un réel M strictement positif tel que la suite $\{(\frac{a}{M})^n, n \in \mathbb{N}\}$ soit bornée dans A).

Dans [3], [5] et [8] le calcul symbolique est multidimensionnel. Dans [7] l'auteur considère une fonction δ lipschitzienne, positive vérifant $\varepsilon \leq \frac{\delta(t)}{|t|} \leq M$ lorsque $|t|$ tend vers ∞, où ε et M sont deux constantes strictement positives.

A la fonction δ, il lui associe une algèbre universelle V_o de fractions rationnelles à une indéterminée z, à coefficients complexes et dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur l'ensemble $\delta^{-1}(0)$. Sur V_o, il considère

la topologie localement convexe telle que la multiplication dans V_o soit continue, et l'ensemble des fractions rationnelles $\{\delta(t)(z-t)^{-1},\ t \notin \delta^{-1}(0)\}$ soit borné. Si α désigne l'intersection des voisinages de 0, c'est un idéal de V_o; le quotient V_o/α est une algèbre localement convexe, séparée. WAELBROECK montre alors que le complété $\widehat{V_o/\alpha}$ est une algèbre de Banach et en donne deux descriptions différentes. Dans l'une des descriptions il construit un calcul symbolique unidimensionnel, en utilisant une formule dérivée de celle de CAUCHY pour des fonctions f continues à support compact telles que $\frac{\partial}{\partial \bar{s}} f(s)$ au sens des distributions soit sommable. C'est cette construction qui a motivé notre travail, dans lequel on part d'une fonction seulement lipschitzienne, et positive sur $\mathbb{C}$; comme WAELBROECK nous lui associons $\mathbb{C}_\delta(X)$ une algèbre de fractions rationnelles à une indéterminée X, a coefficients complexes, et dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur $\delta^{-1}(0)$. Sur $\mathbb{C}_\delta(X)$ nous considérons la bornologie convexe la plus fine telle que l'ensemble des fracticns rationnelles $\{\delta(t)(X-t)^{-1},\ t \notin \delta^{-1}(0)\}$ soit borné. Nous étudions cette algèbre et nous remarquons que le complété bornologique $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$ n'est pas nul ssi $\delta^{-1}(0) \neq \phi$: c'est une b-algèbre (nous rappelons à cette égard, que WAELBROECK à donné un exemple d'un espace bornologique dont le complété est nul).
Nous illustrons la b-algèbre $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$, au moyen de la fonction distance dans $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^+$, de l'opérateur de LAPLACE, opérant ainsi que sa résolvante sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$.

Nous construisons un calcul symbolique unidimensionnel pour les fonctions f définies et de classe C^1 dans un secteur T_α contenant strictement $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour un certain entier naturel N :

$$\sup_{T_\alpha} \left| f(t)\delta_o^N(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{T_\alpha} \delta_o^N(t)\delta^{-m}(t)\bar{\partial} f(t) \wedge dt \right| < +\infty$$

où $\delta_o(t) = \left(\sqrt{1+|t|^2}\right)^{-1}$

$$\delta(t) = \frac{d(t,\mathbb{R}^+)}{1+d(t,\mathbb{R}^+)}$$

m est un entier naturel

à valeurs dans la b-algèbre $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$. Dans ce cas particulier de l'opérateur de LAPLACE, notre calcul symbolique étend le calcul symbolique établi dans [7].

Enfin nous utilisons les Théorèmes cités plus haut pour montrer que le complété bornologique $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ s'identifie bornologiquement à la b-algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ des fonctions f définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, tempérées ainsi que toutes leurs dérivées pour la même filtration; c'est-à-dire

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sup_{\mathbb{R}^+} \delta_o^N(x)|D^k f(x)| < +\infty$.

CHAPITRE 0

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques définitions et propriétés sur les b-algèbres qui nous seront utiles dans ce travail.

CHAPITRE 0. Généralité sur les b-algèbres

Ce chapitre introductif est essentiellement réservé aux rappels des définitions et propriétés sur les b-algèbres.

Toutes les algèbres que nous considérons sont supposées commutatives et unitales, ayant le corps $\mathbb{C}$ comme corps de base.

1°) Définition d'une algèbre bornologique.

On appelle algèbre bornologique, toute algèbre commutative et unitale sur $\mathbb{C}$, munie d'une bornologie $\mathfrak{B}$ vérifiant les axiomes suivants :

a) la somme de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$

b) l'homothétique de tout élément de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$

c) l'enveloppe disquée (convexe et équilibrée) de tout élément de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$

d) le produit de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$

Les éléments de $\mathfrak{B}$ sont appelés parties bornées.

Soit A est une algèbre bornologique et B est un disque borné de A on note par A_B le sous-espace vectoriel de A engendré par B, muni de la jauge de B

$$P_B(x) = \inf\{\lambda > 0 \ / \ x \in \lambda.B\}$$

ainsi le sous-espace vectoriel A_B est semi-normé par la jauge P_B.

L'axiome c) signifie que les algèbres que nous utilisons sont stables par passage à l'enveloppe convexe et équilibrée des parties bornées, donc elles admettent un système fondamental formé de disques bornés.

L'axiome d) signifie que si B_1 et B_2 sont 2 disques bornés de A, alors il existe un disque borné B_3 tel que l'application bilinéaire d'espaces semi-normés de $A_{B_1} \times A_{B_2} \to A_{B_3}$ est bornée.

Si B_1 et B_2 sont 2 disques bornés tels que $B_1 \subset B_2$ alors l'injection canonique de $A_{B_1} \to A_{B_2}$ est bornée.

on en déduit que :

toute algèbre bornologique A est une limite inductive d'espaces semi-normés A_B lorsque B décrit un système fondamental de disques bornés de A.

2°) Convergence bornologique.

Soit A une algèbre bornologique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bornologiquement vers 0 dans A s'il existe

a) un disque borné B de A

b) une suite de scalaires $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_n \in e_n.B$.

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bornologiquement vers 0, s'il existe un disque borné B telle que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit dans le sous-espace semi-normé A_B et converge vers 0 dans A_B.

On écrit alors $x_n = 0(e_n)$

3°) Partie bornologiquement fermée.

Soit A une algèbre bornologique et H une partie de A. On dit que H est bornologiquement fermée, si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que x_n converge bornologiquement vers x dans A, entraîne que $x \in H$

REMARQUE.

- toute réunion finie (resp intersection) de parties bornologiquement fermées est une partie bornologiquement fermée.

4°) Algèbre bornologique séparée

Une algèbre bornologique A est dite séparée si elle ne contient aucune droite complexe bornée.

C'est équivalent de dire que : pour tout disque borné B de A le sous-espace vectoriel A_B muni de la jauge de B est un espace normé.

Ainsi toute algèbre bornologique séparée A est une limite inductive d'espaces normés A_B lorsque B décrit la famille des disques bornés de A.

5°) Définition d'un idéal bornologique.

Soit A une algèbre bornologique, et I un idéal de A.

I est un idéal bornologique de A si I muni d'une bornologie **B'** telle que

- la somme de 2 éléments de **B'** est un élément de **B'**
- l'homothétique de tout élément de **B'** est un élément de **B'**
- le produit d'un borné de A par un borné de I est un élément de **B'**

Si A est une algèbre bornologique non séparée, on note par $\overline{\{0\}}$ la fermeture bornologique dans A de l'idéal {0} : c'est un idéal de A. L'algèbre séparée associée à A est l'algèbre $A/\overline{\{0\}}$ munie de la bornologie quotient.

6°) Morphisme d'algèbres borné.

Soit A_1 et A_2 deux algèbres bornologiques et f un morphisme d'algèbres

$$f : A_1 \to A_2.$$

f est un morphisme d'algèbres borné si l'image de tout disque borné de A_1 est un disque borné de A_2.

7°) Disque borné complétant.

Soit A une algèbre bornologique séparée, et B un disque borné de A.

Le disque borné B est dit complétant si le sous-espace vectoriel A_B muni de la jauge de B est un espace de Banach.

REMARQUE.

Si B_1 et B_2 sont deux disques bornés complétants alors

$$B_1 \cap B_2 \quad , \quad B_1 + B_2 \quad , \quad \overline{B_1 B_2} \quad \text{et} \quad \overline{B_1 \cup B_2}$$

sont des disques complétants.

où $\Gamma B = \{\sum_n \alpha_n x_n \mid x_n \in B \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_n |\alpha_n| \leq 1\}$

c'est l'enveloppe ℓ'-disque du disque borné B.

8°) Définition d'une b-algèbre.

On appelle b-algèbre ou algèbre bornologique complète toute algèbre bornologique séparée admettant une base de bornologie formée de disques complétants. Autrement dit, une b-algèbre A est limite inductive d'espaces de Banach A_B avec morphismes injectifs, lorsque B décrit un système fondamental de disques bornés complétants.

Donc $A = \lim_{\rightarrow}(A_B, \Pi_{B,B'})$

où A_B désigne l'espace de Banach engendré par le disque borné complétant B, et $\Pi_{B,B'}: A_B \to A_{B'}$, l'injection bornée. $(B \subset B')$

NOTATION.

Soit A une b-algèbre, V une partie de $\mathbb{C}$. u une fonction définie de V à valeurs dans A et g une fonction de V à valeurs scalaires.

On écrit $u=O(g)$ s'ils existent un disque borné, complétant dans A, et une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in V$ on a :

$$u(t) = \lambda g(t) B$$

autrement dit, dans le sous-espace de Banach A_B normé par la jauge de B notée $\| \ \|_B$ on a :

$$\|u(t)\|_B \leq |\lambda||g(t)| \qquad \forall t \in V.$$

9°) Spectre d'un élément d'une b-algèbre [8]

Soit A une b-algèbre et a un élément de A.

DEFINITION.

On dit que s n'appartient pas au spectre de a s'il existe un voisinage V(s) de s dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec les propriétés suivantes :

1°) $(a-t)^{-1}$ existe pour tout $t \in V(s) \cap \mathbb{C}$

2°) l'ensemble $\{(a-t)^{-1} \mid t \in V(s) \cap \mathbb{C}\}$ est borné.

On note par Sp a le spectre du point a de A.

REMARQUE.

$s, s_o \notin$ Spa , alors

$$(a-s)^{-1}-(a-s_o)^{-1} = (s-s_o)(a-s)^{-1}(a-s_o)^{-1}$$

si $s \to s_o$ le membre de droite converge vers 0; de ceci on tire que la résolvante est localement lipschitzienne donc elle est continue; et :

$$\lim_{s \to s_o} \frac{(a-s)^{-1}-(a-s_o)^{-1}}{s-s_o} = (a-s_o)^{-2}$$

cette égalité montre que la résolvante est holomorphe là où elle est définie.

CHAPITRE I

Nous étudions l'existence d'une b-algèbre notée $\widehat{\mathcal{C}_\delta}(X)$ engendrée par un opérateur X non régulier dont la croissance de la résolvante est contrôlée par une fonction δ lipschitzienne positive sur $\mathbb{C}$, et nous en donnons un exemple au moyen de la distance à $\mathbb{R}^+$, et l'opérateur de LAPLACE.

CHAPITRE I.: La b-algèbre $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$

On se donne une fonction δ définie et lipschitzienne sur le corps $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et on se propose de déterminer une b-algèbre $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$ utile pour le calcul fonctionnel vérifiant les propriétés suivantes

- $(X - t)^{-1}$ existe $\forall t \notin \delta^{-1}(0)$
- L'ensemble $\{\delta(t)(X-t)^{-1} \not\in t \in \delta^{-1}(0)\}$ est borné dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$ où X désigne une indéterminée.

1°) Existence de la b-algèbre $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$

On note par $\mathbb{C}_\delta(X)$, l'ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée X à coefficients complexes, et dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur l'ensemble $\delta^{-1}(0)$.

$\mathbb{C}_\delta(X)$ munie des lois de compositions: addition, multiplication par un scalaire complexe, et la multiplication ponctuelle des fractions rationnelles devient une algèbre commutative et unitale sur le corps $\mathbb{C}$. Sur $\mathbb{C}_\delta(X)$, on considère la bornologie convexe la plus fine, compatible avec sa structure algébrique telle que l'ensemble des fractions rationnelles

$$\{\delta(t)(X-t)^{-1} \not\in t \in \delta^{-1}(0)\}$$

soit borné.

$\mathbb{C}_\delta(X)$ devient alors une algèbre bornologique sur le corps $\mathbb{C}$

DEFINITION.

On appelle spectre de $\mathbb{C}_\delta(X)$ et le note par $SP\mathbb{C}_\delta(X)$, l'ensemble des caractères bornés de $\mathbb{C}_\delta(X)$.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.

a) $SP\mathbb{C}_\delta(X)$ est non vide si et seulement si $\delta^{-1}(0)$ est non vide de plus on a

b) $\{\psi(X) \ / \ \psi \in SP\mathbb{C}_\delta(X)\} = \delta^{-1}(0)$

DEMONSTRATION.

On démontre l'équivalence dans a)

Condition nécessaire : on raisonne par l'absurde, supposons que $\delta^{-1}(0)=\{0\}=\phi$ soit ψ un caractère borné de $\mathbb{C}_\delta(X)$, donc il envoie tout ensemble borné de $\mathbb{C}_\delta(X)$ sur un ensemble borné de $\mathbb{C}$, donc il existe $M > 0$ tel que

$$\psi(\{\delta(t)(X-t)^{-1} \ / \ t \in \mathbb{C}\}) \subset \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq M\}$$

c'est-à-dire que

$$\left|\frac{\delta(t)}{\psi(X)-t}\right| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

donc

$$0 < \delta(t) < M|\psi(X)-t| \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

ceci est impossible vu que $\psi(X) \in \mathbb{C}$

donc $\delta^{-1}(0)$ ne peut être vide et par conséquent $\psi(X) \in \delta^{-1}(0)$.

Condition suffisante : d'abord un caractère ψ de $\mathbb{C}_\delta(X)$ est connu dès que sa valeur sur l'indéterminée X est connue puisqu'on a

$$\psi\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right) = \frac{P(\psi(X))}{Q(\psi(X))} \qquad \forall \frac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}_\delta(X)$$

si $\alpha \in \delta^{-1}(0)$, on définit un et un seul caractère borné ψ_α de $\mathbb{C}_\delta(X)$ en posant

$$\psi_\alpha(X) = \alpha$$

Alors $SP\mathbb{C}_\delta(X)$ est non vide.

Le point b) est une conséquence immédiate du point a).

REMARQUES.

1°) La proposition 1 permet d'identifier les ensembles $SP\mathbb{C}_\delta(X)$ et $\delta^{-1}(0)$ dans le sens suivant : il existe une bijection L définie par

$$t \in \delta^{-1}(0) \quad \rightarrow \quad L(t) \in SP\mathbb{C}_\delta(X)$$

telle que

$L(t)X = t$ évaluation sur X.

2°) Tout idéal propre de $\mathbb{C}_\delta(X)$ est engendré par un polynôme non nul ayant tous ses zéros sur l'ensemble $\delta^{-1}(0)$.

La bornologie convexe définie sur l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ peut ne pas être séparée comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.

Si la fonction δ admet un nombre fini de zéros chacun d'ordre fini alors

a) la bornologie convexe définie sur $\mathbb{C}_\delta(X)$ est non séparée,

b) l'algèbre séparée associée est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

DEMONSTRATION.

D'abord dire que δ admet un nombre fini de zéros chacun d'ordre fini signifie qu'il existe un polynôme $P(t)$ non nul tel que

$$\delta(t) \geq \varepsilon|P(t)| \quad \text{pour } t \text{ près de } \delta^{-1}(0)$$

où ε est une constante strictement positive.

a) on raisonne par l'absurde: supposons que l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ est séparée [2] alors $\mathbb{C}_\delta(X)$ est une limite inductive d'espaces normés $\mathbb{C}_B(X)$ où B décrit un système fondamental de disques bornés.

$\mathbb{C}_B(X)$ est un espace normé par la jauge du disque borné B, son complété $\widehat{\mathbb{C}_B(X)}$ est un espace de Banach.

Pour t près de $\delta^{-1}(0)$, la qualité $\frac{P(t)}{t-X}$ est bornée et holomorphe à valeurs dans un Banach $\widehat{\mathbb{C}_B(X)}$. Le théorème du calcul fonctionnel holomorphe [1] dit : Sur tout contour Γ convenable entourant l'ensemble $\delta^{-1}(0)$ on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{P(t)}{t-X}\,dt = P(X) = 0$$

donc, le polynôme $P(X)$ est identiquement nul, il y a alors contradiction. L'algèbre est alors non séparée.

b) Soit $\overline{\{0\}}$ la fermeture bornologique de l'idéal $\{0\}$, c'est un idéal propre de $\mathbb{C}_\delta(X)$, d'après la remarque de la proposition 1 il va exister un polynôme non nul $P(X)$ tel que

$$\overline{\{0\}} = P(X)\mathbb{C}_\delta(X)$$

L'algèbre séparée associée à $\mathbb{C}_\delta(X)$ est l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)/P(X)\mathbb{C}_\delta(X)$ laquelle est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

En effet, soit $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée X à coefficients complexes, on sait que pour tout polynôme non nul P(X) l'ensemble $P(X)\,\mathbb{C}[X]$ est un idéal propre de $\mathbb{C}[X]$. $\mathbb{C}[X]_{/P(X)\mathbb{C}[X]}$ une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{C}$.
L'application définie de $\mathbb{C}[X]/P(X)\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}_\delta(X)/P(X)\mathbb{C}_\delta(X)$ est bijective :

- l'application est évidemment injective

- l'application est surjective, car un élément de l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{U_1(X)}{U_2(X)} \quad \text{avec } U_2(t) \neq 0 \qquad \forall t \in \delta^{-1}(0)$$

les polynômes P(X) et $U_2(X)$ sont premiers entre eux, donc il existe deux polynômes A(X) et B(X) tels que :

$$A(X)U_2(X) + B(X)P(X)=1$$

donc $$A(X) + P(X)\,\frac{B(X)}{U_2(X)} = \frac{1}{U_2(X)}$$

ce qui donne $$\frac{U_1(X)}{U_2(X)} = A(X)U_1(X) + P(X)B(X)\,\frac{U_1(X)}{U_2(X)}$$

c'est-à-dire que $$\frac{U_1}{U_2} \equiv AU_1 \mod(P(X)\mathbb{C}_\delta(X))$$

d'où la surjection.

L'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)/P(X)\mathbb{C}_\delta(X)$ est alors de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

CONDITIONS DE SEPARATION DE L'ALGEBRE $\mathbb{C}_\delta(X)$

Nous donnons deux conditions suffisantes pour que la bornologie convexe définie sur l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ soit séparée.

PROPOSITION 3.

Pour que la bornologie convexe définie sur l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ soit séparée, il suffit que la fonction δ s'annule sur une suite infinie de points de $\mathbb{C}$.

DEMONSTRATION.

Soit $\{\delta^{-1}(0) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de points de $\mathbb{C}\}$

On raisonne par l'absurde : supposons que la bornologie définie sur $\mathbb{C}_\delta(X)$ est non séparée, alors $\mathbb{C}_\delta(X)$ admet au moins une droite bornée [2].

Soit $\{\lambda P(X) / \lambda \in \mathbb{C}\}$ une droite bornée où $P(X)$ est un polynôme non nul.

D'après la proposition 1 tout point z_n de $\delta^{-1}(0)$ définit un et un seul caractère borné de $\mathbb{C}_\delta(X)$, donc la droite complexe bornée $\{\lambda P(X) / \lambda \in \mathbb{C}\}$ se transforme par chaque z_n en une droite bornée de $\mathbb{C}$ donc $P(z_n)=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc le polynôme $P(X)$ est identiquement nul puisqu'il admet une infinité de racines. Il y a alors une contradiction.

La bornologie convexe définie sur l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ est nécessairement séparée.

PROPOSITION 4.

Pour que la bornologie convexe définie sur l'algèbre $\mathbb{C}_\delta(X)$ soit séparée, il suffit que la fonction δ admette un zéro d'ordre infini, c'est-à-dire si t_o est un zéro de δ on a :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\delta(t) = 0(|t-t_o|)^n$ pour t près de t_o.

La démonstration de la proposition 4 repose essentiellement sur les techniques des séries formelles entières dont on fait un bref rappel.

Soit $\mathbb{C}[[X]]$, l'algèbre des séries formelles entières à une indéterminée X à coefficients complexes [1].

Une série formelle entière est un élément de la forme

$$\sum_n a_n X^n$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- La somme de deux séries formelles entières se définit par

$$\left(\sum_n a_n X^n\right) + \left(\sum_n b_n X^n\right) = \sum_n (a_n+b_n) X^n$$

- Le produit d'une série formelle entière par un sclaire se définit par

$$\lambda.(\sum_n a_n X^n) = \sum_n (\lambda.a_n)X^n \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- Le produit de deux séries formelles entières se définit par

$$(\sum_n a_n X^n) \cdot (\sum_m b_m X^m) = \sum_p c_p X^p$$

où pour tout $p \in \mathbb{N}$ $\quad c_p = \sum_{i=0}^{p} a_{p-i} b_i \in \mathbb{C}$

- L'élément unité de l'algèbre $\mathbb{C}[[X]]$ est la série formelle entière définie par

$$\sum_n a_n X^n = 1 \quad \text{où} \quad a_o = 1 \quad \text{et} \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Ainsi $\mathbb{C}[[X]]$ est une algèbre commutative et unitale sur $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}[[X]]$ contient l'algèbre des polynômes, puisque chaque polynôme s'identifie à sa série entière formelle dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Une série formelle entière est inversible si et seulement si son terme constant est non nul. Donc $\mathbb{C}[[X\ ]]$ contient aussi l'algèbre des fractions rationnelles de la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} \quad \text{telle que} \quad Q(0) \neq 0$$

Sur $\mathbb{C}[[X]]$, on considère la famille $\mathcal{B}$ de sous ensembles définis par

$$B_{(M_n)_{n \in \mathbb{N}}} = \{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \ / \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M_n \}$$

où $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs.

- La famille $\mathcal{B}=(B_{(M_n)})_{(M_n)_{n \in \mathbb{N}}} \subset (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ vérifie :

- $$\bigcup_{(M_n)_{n \in \mathbb{N}}} B_{(M_n)_{n \in \mathbb{N}}} = \mathbb{C}[[X]]$$

- La somme de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$, plus précisement

$$B_{(M_n)_{n\in\mathbb{N}}} + B_{(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset B_{(M_n+M'_n)_{n\in\mathbb{N}}}$$

- L'homothétique de tout élément de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$, plus précisément

$$\lambda . B_{(M_n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset B_{(|\lambda| M_n)_{n\in\mathbb{N}}} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

- Le produit de deux éléments de $\mathfrak{B}$ est un élément de $\mathfrak{B}$, plus précisément

$$B_{(M_n)_{n\in\mathbb{N}}} \cdot B_{(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset B_{(M''_n)_{n\in\mathbb{N}}}$$

où $\quad M''_p = \sum_{k=0}^{p} M_{p-k} M'_k \in \mathbb{C} \quad$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

- Chaque élément de $\mathfrak{B}$ est convexe, équilibré et complétant.

Ainsi la famille $\mathfrak{B}$ définit un système fondamental de disques bornés complétants sur $\mathbb{C}[[X]]$ qui devient une b-algèbre.

On peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.

Si la fonction δ admet un zéro t_o d'ordre infini c'est-à-dire que

$\delta(t) = O(|t-t_o|^n)$ pour t près de t_o

alors $\mathbb{C}_\delta(X)$ s'injecte bornologiquement dans la b-algèbre $\mathbb{C}[[X]]$

DEMONSTRATION.

On se limite au cas où $\delta(t) = \inf(|t|^n \forall n \in \mathbb{N}, 1)$ car, par une translation on peut toujours nous ramener à ce cas

pour $t\neq 0$ on a $\quad \frac{1}{X-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{t})^{n+1} X^n$

donc $\frac{\delta(t)}{X-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\delta(t)}{t^{n+1}})X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ puisque tous les coefficents sont bornés.

donc, l'ensemble $\{\delta(t)(X-t)^{-1}/t\neq 0\} \subset B_1$

où B_1 est le disque borné dans $\mathbb{C}[[X]]$ défini par :

$$B_1=\{\sum_n a_n X^n \ / \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq 1\}$$

Une fraction rationnelle de $\mathbb{C}_\delta(X)$ est de la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} \quad \text{avec} \quad Q(t)\neq 0 \ \forall t\neq 0$$

or, $$Q(X)=\prod_{i=0}^{m} (X-t_i)^{p_i} \qquad t_i\neq 0 \qquad i=0,1,\ldots,m$$

donc $$\prod_{i=0}^{m} \frac{\delta(t_i)}{Q(X)} = \prod_{i=0}^{m} (\frac{\delta(t_i)}{X-t_i})^{p_i} \in B_1^{p_i}$$

où $B_1^{p_i} = B_1.B_1....B_1$ p_i-fois est borné dans $\mathbb{C}[[X]]$

Comme chaque fraction rationnelle s'identifie à sa série formelle entière dans $\mathbb{C}[[X]]$, on voit facilement que l'application définie de

$$\mathbb{C}_\delta(X) \to \mathbb{C}[[X]]$$

est injective et bornée.

La preuve de la proposition 4 découle immédiatement de la proposition 5.

En général, l'algèbre bornologique $\mathbb{C}_\delta(X)$ n'est pas complète, soit $\widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$ sont complété bornologique qui est caractérisé d'après I 4 I par l'existence d'un morphisme d'algèbres borné i, unique

$$i : \mathbb{C}_\delta(X) \to \widehat{\mathbb{C}_\delta(X)}$$

possédant la propriété universelle suivante :

Pour tout morphisme d'algèbres $u:\mathbb{C}_\delta(X) \to A$ où A est une b-algèbre, il existe un morphisme de b-algèbres $\tilde{u}$ unique

$$\tilde{u} : \widehat{\mathbb{C}_\delta(X)} \to A$$

tel que

$$\tilde{u} \circ i = u$$

$\widehat{\mathcal{C}_\delta(X)}$ est la b-algèbre cherchée.

On voit facilement que :

- $(X-t)^{-1}$ existe dans $\widehat{\mathcal{C}_\delta(X)}$ $\forall t \notin \delta^{-1}(0)$
- l'ensemble $\{\delta(t)(X-t)^{-1} / \forall t \notin \delta^{-1}(0)\}$ est borné dans $\widehat{\mathcal{C}_\delta(X)}$

2°) Exemple de b-algèbre.

On donne un exemple de b-algèbre $\widehat{\mathcal{C}_\delta(X)}$, dans laquelle un calcul fonctionnel unidimensionnel sera effectué au chapitre suivant.

Sur le corps $\mathbb{C}$, on considère la fonction δ définie par

$$\delta(t) = \frac{d(t,\mathbb{R}^+)}{1+d(t,\mathbb{R}^+)}$$

où $d(t,\mathbb{R}^+)$ désigne la distance du point t de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^+$.

La fonction δ est évidemment lipschitzienne sur $\mathbb{C}$.

L'opérateur de LAPLACE $-\Delta$ opère sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{F}(-\Delta T)=|\xi|^2\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de FOURIER.

$\mathcal{F}T$ la transformée de FOURIER de la distribution T.

De même pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, l'opérateur $(-\Delta-t)^{-1}$ est défini et opère lui aussi sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$(a) \qquad \mathcal{F}((-\Delta-t)^{-1}T) = (|\xi|^2-t)^{-1}\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}_n$ par

$$\xi \in \mathbb{R}_n \to (|\xi|^2-t)^{-1}$$

est de classe C^∞ puis tempérée ainsi que toutes ses dérivées, donc c'est un multiplicateur de l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$.

En appliquant $\mathcal{F}^{-1}$ à la relation (a) on obtient

$$(-\Delta-t)^{-1}T = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2-t)^{-1} * T$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée de FOURIER inverse.

Plus généralement, si P(X) et Q(X) sont deux polynômes tels que

$$Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

on peut considérer l'opérateur $\frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)}$ qui opère lui aussi sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{F}\left(\frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)}\, T\right) = \frac{P(|\xi|^2)}{Q(|\xi|^2)}\, \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$$

En appliquant $\mathcal{F}^{-1}$ à la relation ci-dessus on obtient

$$\frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)}\, T = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P(|\xi|^2)}{Q(|\xi|^2)}\right) * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi on définit $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ munie des lois de compositions : addition multiplication par un scalaire complexe, et la composition.

$\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ devient alors une algèbre commutative et unitale sur le corps $\mathbb{C}$.

Un élément de $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)}$$

où P(X) et Q(X) sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $Q(X) \neq 0 \quad \forall x \notin \mathbb{R}^+$.

Sur $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ on considère la bornologie convexe décrite plus haut telle que l'ensemble des fractions rationnelles

$$\{\delta(t)(-\Delta - t)^{-1} \;/\; t \notin \mathbb{R}^+\}$$

soit borné.

$\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ devient alors une algèbre bornologique séparée en vertu de la proposition 3 du paragraphe 1°). De plus la proposition 1 permet d'identifier les ensembles $SP\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ et $\mathbb{R}^+$ dans le sens suivant :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on fait correspondre l'unique caractère borné ψ_x de $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ défini par

$$\psi_x\left(\frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)}\right) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall \frac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)} \in \mathcal{C}_\delta(-\Delta)$$

de ceci on tire que :

Le complété bornologique $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ de $\mathcal{C}_\delta(-\Delta)$ n'est pas nul: c'est une b-algèbre.

Maintenant si on considère la b-algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \delta_o)$ des fonctions continues et tempérées sur $\mathbb{R}^+$ on a la proposition suivante :

PROPOSITION

L'application définie de $\mathcal{C}_\delta(-\Delta) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

par $\dfrac{P(-\Delta)}{Q(-\Delta)} \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

est un morphisme d'algèbres borné, injectif.

DEMONSTRATION

La preuve est immédiate.

L'intérêt de la proposition réside dans ce qui suit :

d'après [4] le complété bornologique $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ est caractérisé par l'existence d'un morphisme d'algèbres borné i , unique défini de

$$i : \mathcal{C}_\delta(-\Delta) \to \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$$

possédant la propriété universelle suivante :

Tout morphisme d'algèbres borné $u:\mathcal{C}_\delta(-\Delta) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ se prolonge en un morphisme de b-algèbres $\tilde{u}$ unique vérifiant le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_\delta(-\Delta) & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\delta_o) \\ & {\scriptstyle i}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \tilde{u}} & \\ & \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)} & \end{array}$$

avec $\tilde{u} \circ i = u$.

D'après la proposition ci-dessus le morphisme u est injectif, on en déduit que le morphisme i est aussi injectif, donc le spectre de $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ noté par $SP\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ s'identifie lui aussi à l'ensemble $\delta^{-1}(0)=\mathbb{R}^+$.

CHAPITRE II

Nous construisons un calcul symbolique, dans $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$, qui étend un calcul symbolique donné par WAELBROECK pour un opérateur régulier.

CHAPITRE II. Théorème du calcul fonctionnel.

On défini une b-algèbre notée $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ de fonctions définies et de classe C^1 dans un secteur de $\mathbb{C}$, contenant l'axe réel positif, ayant la croissance tempérée lorsque $|t| \to \infty$, et on établit un morphisme de b-espaces défini de :

$$\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \to \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$$

En utilisant l'effet du produit tensoriel, on montre que ce morphisme de b-espace est en réalité un morphisme de b-algèbres.

D'abord on définit la b-algèbre $\mathcal{C}^1_\delta(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

1°) DEFINITION DE LA b-ALGEBRE $\mathcal{C}^1_\delta(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

Pour α fixe dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, on considère le secteur de $\mathbb{C}$ défini par

$$T_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}\ z \geq -\alpha \text{ et } |\mathrm{Arg}(z+\alpha)| \leq \alpha\}$$

alors $\mathbb{R}^+ \subset T_\alpha$

On note par $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ l'algèbre des fonctions f définies et de classe C^1 dans le secteur T_α, vérifiant pour un certain entier naturel N

$$\sup_{T_\alpha} |f(t)\delta_o^N(t)| + \frac{1}{2\pi} \int_{T_\alpha} \delta_o^N(t)\delta^{-m}(t)|\bar\partial f(t) \wedge dt| < +\infty$$

où $\delta_o(t) = (1+|t|^2)^{-1/2}$

$$\delta(t) = \frac{d(t,\mathbb{R}^+)}{1+d(t,\mathbb{R}^+)} \quad \text{avec } d(t,\mathbb{R}^+) = \text{distance de } t \text{ à } \mathbb{R}^+$$

$$\bar\partial f(t) = \frac{\partial}{\partial \bar t} f(t) d\bar t$$

m est un entier naturel positif

$-\Delta$ désigne l'opérateur de LAPLACE sur $\mathbb{R}^n$.

Pour N fixé dans $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ normé par

$$\|f\|_N = \sup_{T_\alpha} |f(t)|\delta_o^N(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{T_\alpha} \delta_o^N(t)\delta^{-m}(t)|\bar\partial f(t) \wedge dt|$$

c'est un espace de Banach.

Si $N_2 \geq N_1$ l'injection naturelle de

$$\mathfrak{C}^1_{\alpha,N_1}(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \xrightarrow{\Pi_{N_1,N_2}} \mathfrak{C}^1_{\alpha,N_2}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$$

est continue, et on vérifie sans peine que

$$\mathfrak{C}^1_{\alpha}(-\Delta,m,\delta,\delta_o) = \varinjlim(\mathfrak{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o),\Pi_{N,N'})$$

c'est une limite inductive d'espaces de Banach avec morphismes injectifs donc $\mathfrak{C}^1_{\alpha}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ est une b-algèbre.

2°) CALCUL FONCTIONNEL.

Avant d'énoncer le théorème du calcul fonctionnel, quelques résultats

PROPOSITION 7.

Pour tout $\varepsilon > 0$, si on considère le secteur de $\mathbb{C}$ défini par

$$T_\varepsilon = \{t \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}\ t \geq -\varepsilon \text{ et } |\mathrm{Arg}(t+\varepsilon)| \leq \varepsilon\}$$

il est toujours possible de trouver une fonction ψ_ε définie et de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans $[0,1]$ valant

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in T_{\theta.\varepsilon} \text{ où } \theta \in]0,1[\\ 0 \text{ si } t \notin T_\varepsilon \end{cases}$$

et telle que pour toute dérivation D d'ordre 1 on a

$$\varepsilon|\psi_\varepsilon(t)| \leq K$$

où K est une constante indépendante de ε.

DEMONSTRATION.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout nombre réel $\theta \in]0,1[$ la fonction définie par

$$\psi_\varepsilon(t) = \mathrm{EXP}\left(-\left(\frac{d(t,T_{\theta.\varepsilon})}{d(t,\complement T_\varepsilon)}\right)^2\right)$$

où $d(t,T_{\theta.\varepsilon})$ = distance du point t de $\mathbb{C}$ au secteur $T_{\theta.\varepsilon}$

$d(t,\complement T_\varepsilon)$ = distance du point t de $\mathbb{C}$ au bord du secteur T_ε répond à la proposition.

LEMME 1.

Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout entier naturel $k \geq 1$, on peut trouver des fonctions $u_{\varepsilon,k}$ et $y_{\varepsilon,k}$ définies et de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ vérifiant :

1°) $\mathrm{Supp}(y_{\varepsilon,k})$ et $\mathrm{Supp}(\bar\partial y_{\varepsilon,k})$ sont dans le secteur T_ε. $\forall k \geq 1$

2°) Il existe un borné complétant B dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ tel

$$\delta^m(t)u_{\varepsilon,k}(t) \in B \quad \forall \varepsilon < 0\ ,\ \forall t \in T\ ,\ \forall m,k \geq 1$$

3°) Les coefficients des formes différentielles vérifient

$$\bar\partial y_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon} O\left(\frac{1}{|t|^k}\right) \quad \text{quand} \quad |t| \to \infty$$

$$\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} O\left(\frac{1}{|t|^k}\right) \quad \text{quand} \quad |t| \to \infty$$

4°) $(-\Delta-t)u_{\varepsilon,k}(t)+y_{\varepsilon,k}(t) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0\ ,\ \forall t \in \mathbb{C}\ ,\ \forall k \geq 1$

DEMONSTRATION.

La construction de la famille $(u_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ se fait en deux étapes.

a) étape : la fonction $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \to (-\Delta-t)^{-1} \in \widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ est définie, puis holomorphe car elle est localement bornée [7].

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère :

- le secteur $T_\varepsilon = \{t \in \mathbb{C} \ /\ \mathrm{Re}\ t \geq -\varepsilon \ \text{ et } |\mathrm{Arg}(t+\varepsilon)| \leq \varepsilon\}$
- la fonction $\psi_\varepsilon(t)$ de la proposition 7 définie par

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in T_{\varepsilon/2} \\ 0 & \text{si } t \notin T_\varepsilon \end{cases}$$

et pour toute dérivation D d'ordre 1 on a $\varepsilon|\psi_\varepsilon(t)| \leq K$

où K est une constante indépendante de ε.

On pose

$$u_\varepsilon(t) = (1-\psi_\varepsilon(t))(-\Delta-t)^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

Déjà les fonctions u_ε et ψ_ε sont de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ et vérifiant la relation

$$(A) \quad (-\Delta-t)u_\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

b) <u>étape</u> : on considère les fonctions définies dans [7] par

$$U(t) = \frac{\bar{t}}{1+|t|^2}$$

$$Y(t) = \frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}$$

les fonctions U et Y sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$;

et vérifiant la relation

$$(-\Delta-t)U(t)+Y(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

donc aussi on a

$$(-\Delta-t)U(t)+Y(t)[(-\Delta-t)U(t)+Y(t)] = 1$$

$$= (-\Delta-t)U_2(t)+Y_2(t) = 1$$

où

$$U_2(t) = U(t)(1+Y(t))$$

$$Y_2(t) = Y^2(t)$$

de même on a

$$(-\Delta-t)U_2(t)+Y_2(t)[(-\Delta-t)U(t)+Y(t)] = 1$$

$$= (-\Delta-t)U_3(t)+Y_3(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

où

$$U_3(t) = U(t)(1+Y(t)+Y^2(t))$$

$$Y_3(t) = Y^3(t)$$

En répétant k-fois l'opération on aboutit à la relation

$$(B) \quad (-\Delta-t)U_k(t)+Y_k(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

où

$$U_k(t) = U(t)\left(\sum_{i=0}^{k-1} (Y^i(t))\right)$$

$$Y_k(t) = Y^k(t)$$

Les fonctions U_k et Y_k sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$.

On groupe les relations (A) et (B) de la façon suivante

$$(-\Delta-t)U_k(t)+Y_k(t)[(-\Delta-t)u_\varepsilon(t)+\psi_\varepsilon(t)] = 1$$

$$= (-\Delta-t)u_{\varepsilon,k}(t)+y_{\varepsilon,k}(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

où

$$u_{\varepsilon,k}(t) = U_k(t)+Y_k(t)u_\varepsilon(t)$$

$$y_{\varepsilon,k}(t) = \psi_\varepsilon(t)Y_k(t)$$

Ce sont les fonctions cherchées.

- La vérification des points 1°) et 4°) du lemme 1 est immédiate.

- On vérifie le point 2°) du lemme 1, en effet, d'abord on sait que l'ensemble $\{\delta(t)(-\Delta-t)^{-1} / t \notin \mathbb{R}^+\}$ est borné dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$, donc il existe un disque borné complétant B_1 dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ tel que

$$\delta(t)(-\Delta-t)^{-1} \in B_1 \quad \forall t \notin \mathbb{R}^+$$

donc

$$(-\Delta-t)^{-1} \in \frac{1}{\delta(t)} B_1 \ \forall t \notin \mathbb{R}^+$$

mais

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1-\psi_\varepsilon(t)}{-\Delta-t} \qquad t \in \mathbb{C}$$

et $u_\varepsilon(t)=0$ si $t \in T_{\varepsilon/2}$ (d'après le choix de la fonction ψ_ε)

donc, si $t \notin T_{\varepsilon/2}$ on a $\delta(t) > \frac{\varepsilon}{2}$ et $u_\varepsilon(t) \in \frac{2}{\varepsilon} B_1 \quad \forall t \in \mathbb{C}$

or $$u_{\varepsilon,k}(t) = U_k(t)+Y_k(t)u_\varepsilon(t)$$

où

$$U_k(t) = \frac{\bar{t}}{1+|t|^2}\left(\sum_{i}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{1-\bar{t}}{1+|t|^2}\right)^i\right)$$

$$Y_k(t) = \left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^k$$

Les fonctions U_k et Y_k sont bornées dans $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ donc il va exister un disque borné complétant B dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ tel que

$$\delta^m(t)u_{\varepsilon,k}(t) \in B \quad \forall t \in \mathbb{C} \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall m,k \geq 1$$

ce qui établit le point 2°) du lemme 1.

- On vérifie le point 3°) du lemme 1, en effet :

d'abord on a

$$y_{\varepsilon,k}(t) = \psi_\varepsilon(t)Y_k(t) = \psi_\varepsilon(t)\left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^k$$

donc

$$y_{\varepsilon,k}(t) = 0\left(\frac{1}{|t|^k}\right) \text{ quand } |t| \to \infty$$

et

$$\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t) = \bar{\partial}\psi_\varepsilon(t)\left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^k - k\psi_\varepsilon(t)\left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^{k-1}\left(\frac{t+\Delta}{(1+t^2)^2}\right)d\bar{t}$$

avec

$$\varepsilon|\psi_\varepsilon(t)| \leq K$$

finalement on obtient

$$\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\, 0\left(\frac{1}{|t|^k}\right) \quad \text{quand} \quad |t| \to \infty$$

la fonction u_ε est donnée par

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1-\psi_\varepsilon(t)}{-\Delta-t} \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

donc

$$\bar{\partial}u_\varepsilon(t) \in \frac{2K}{\varepsilon^2} B_1$$

où B_1 est le disque borné complétant contenant l'ensemble borné

$$\{\delta(t)(-\Delta-t)^{-1} \ / \ t \notin \mathbb{R}^+\}$$

la famille (U_k,Y_k) vérifie la relation

$$(C) \quad (-\Delta-t)U_k(t)+Y_k(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

donc $$(-\Delta-t)\bar{\partial}U_k(t)+\bar{\partial}Y_k(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

mais

$$\bar{\partial} Y_k(t) = -k\left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^{k-1}\left(\frac{t+\Delta}{(1+|t|^2)^2}\right)d\bar{t}$$

donc

$$(-\Delta-t)\bar{\partial} U_k(t) = -k\left(\frac{1-\bar{t}\Delta}{1+|t|^2}\right)^{k-1}\left(\frac{t+\Delta}{(1+|t|^2)^2}\right)d\bar{t}$$

en multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus et en tenant compte de la relation (C), après groupement des termes on obtient la relation

$$\bar{\partial} U_k(t) = Y_k(t)\bar{\partial} U_k(t) - kY_{k-1}(t)\left(\frac{1}{(1+|t|^2)^2}\right)(1-Y_k(t))d\bar{t}$$

donc $\quad \bar{\partial} U_k(t) = O\left(\frac{1}{|t|^k}\right)$ quand $|t| \to \infty$

mais $\quad u_{\varepsilon,k}(t) = U_k(t) + Y_k(t)u_\varepsilon(t)$

donc $\quad \bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) = \bar{\partial} U_k(t) + \bar{\partial} Y_k(t)u_\varepsilon(t) + Y_k(t)\bar{\partial} u_\varepsilon(t)$

tenant compte des relations (A) et (B) on obtient que

$$\bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, O\left(\frac{1}{|t|^k}\right) \quad \text{quand} \quad |t| \to \infty$$

ce qui achève la vérification de tous les points du lemme 1.

LEMME 2.

Soit $(u'_{\varepsilon,k}, y'_{\varepsilon,k})$ une famille quelconque vérifiant le lemme 1 et f une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ à valeurs scalaires, alors pour tout entier naturel $p \geq 1$ on a :

$$(p+1)f y'^{p}_{\varepsilon,k}\, u'_{\varepsilon,k} - p f y'^{p-1}_{\varepsilon,k} = \bar{\partial}(f y'^{p}_{\varepsilon,k} u'_{\varepsilon,k}) - y'^{p}_{\varepsilon,k} u'_{,k}\bar{\partial} f$$

DEMONSTRATION.

On part de la relation où on omet tous les indices

$$(1)\qquad \bar\partial(fy^p u) = fy^p\partial u - \bar\partial(fy^p)u$$
$$= fy^p\bar\partial u - \bar\partial f\, y^p u - pf\, y^{p-1}\,\bar\partial y u$$

mais la famille (u,y) vérifie entre autre la relation

$$(2)\qquad (-\Delta-t)u+y = 1$$

donc $(-\Delta-t)\bar\partial u+\bar\partial y=0$

en remplaçant $\bar\partial y$ par $-(-\Delta-t)\bar\partial u$ dans la relation (1) et en tenant compte de la relation (2), après groupement des termes semblables, on trouve la relation cherchée.

Maintenant, on peut énoncer le théorème du calcul fonctionnel. On montre dans un premier temps que le théorème défini un morphisme de b-espaces, et plus tard en utilisant l'effet du produit tensoriel sur les transformations linéaires injectives, on montre que ce morphisme de b-espaces est effectivement un morphisme de b-algèbres.

THEOREME 1.

Soit $(v_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ une famille quelconque vérifiant le lemme 1 et f une fonction de $\mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ alors pour tout entier naturel p la forme différentielle

$$t \to f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial v_{\varepsilon,k}(t)$$

a son support dans le secteur T_ε et intégrable sur $\mathbb{C}$ dès que $k-N \geq 4$ de plus la famille

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial v_{\varepsilon,k}(t)\wedge dt$$

admet une limite notée $f[-\Delta]$ dans $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ quand ε tend vers 0. Cette limite est indépendante et de la famille $(v_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ et de l'entier p. L'application $f \to f[-\Delta]$ est linéaire bornée.

DEMONSTRATION.

On montrera plus tard que l'application $f \to f[-\Delta]$ est linéaire et bornée. L'existence de l'élément $f[-\Delta]$ se fait en trois parties: on montre d'abord que la limite existe pour la famille particulière construite au lemme 1, puis on montre que cette limite est inchangée quand on prend une autre famille vérifiant le lemme 1. Enfin en utilisant le lemme 2 on montre que la limite ne dépend pas de l'entier p.

Mais auparavant si $(v_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ est n'importe quelle famille vérifiant le lemme 1 alors $(v_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ vérifie la relation

$$(-\Delta-t)v_{\varepsilon,k}(t)+y_{\varepsilon,k}(t) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

donc $$(-\Delta-t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t)+\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

en multipliant la dernière relation par $v_{\varepsilon,k}(t)$ et en transposant on obtient la nouvelle relation

$$(-\Delta-t)v_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) = -v_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t)$$

donc $$(1-y_{\varepsilon,k}(t))\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) = -v_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t)$$

ce qui donne

$$\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) = y_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) - v_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t)$$

comme $\mathrm{Supp}(y_{\varepsilon,k})$ et $\mathrm{Supp}(\bar{\partial}y_{\varepsilon,k})$ sont dans T_ε $\forall k \geq 1$

on en déduit alors que

$$\mathrm{Supp}(\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}) \subset T_\varepsilon \quad \forall k \geq 1$$

Ainsi la forme différentielle $t \to f(t)\, y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t)$ est continue à support dans le secteur T_ε.

Estimation de $f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t)$ lorsque $|t| \to \infty$

on a $\quad f(t) = O(|t|^N)$ quand $|t| \to \infty$

$\quad y^p_{\varepsilon,k}(t) = O(1)$ en fonction de t

$\quad \bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} O(\frac{1}{|t|^k})$ quand $|t| \to \infty$

donc $\quad f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} O(\frac{1}{|t|^4})$ quand $|t| \to \infty$

ainsi la forme différentielle $f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t)$ prolongée par 0 hors du secteur T_ε est intégrable sur $\mathbb{C}$, donc l'intégrale définie par

$$\int_{T_\varepsilon} f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\ \bar{\partial}v_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt$$

existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier naturel p.

1) Etape : soit $(u_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ la famille construite au lemme 1, on fait p=0 et on montre que l'intégrale

$$\int_{T_\varepsilon} f(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt$$

admet une limite quand ε tend vers 0

en effet, soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ donc $T_{\varepsilon'} \subset T_\varepsilon$

on forme

$$\int_{T_\varepsilon} f(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t)\ dt - \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon',k}(t) \wedge dt$$

$$= \int_{T_\varepsilon} \partial(f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u'_{\varepsilon,k}(t))) \wedge dt - \int_{T_\varepsilon} (u_{\varepsilon,k}(t)-u'_{\varepsilon,k}(t))\bar{\partial}f(t) \wedge dt$$

nous montrons que $\int_{T_\varepsilon} \partial(f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t)))dt = 0$

en effet on a $\quad T_\varepsilon = \lim_{M\to\infty} T_{\varepsilon,M}$

où $\quad T_{\varepsilon,M} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ -\varepsilon \leq \mathrm{Re}\ z \leq M \text{ et } |\mathrm{Arg}(z+\varepsilon)| \leq \varepsilon\}$

sur chaque $T_{\varepsilon,M}$ on peut appliquer le théorème de STOCKS donc

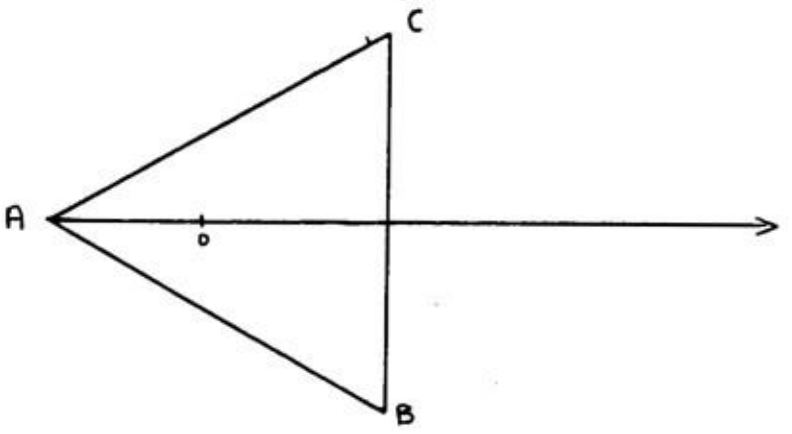
$$\int_{T_{\varepsilon,M}} \partial f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))dt = \int_{\partial T_{\varepsilon,M}} f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))dt$$

mais

$$u(t)_{\varepsilon,k} - u_{\varepsilon',k}(t) = U_k(t)\frac{\psi_{\varepsilon'}(t)-\psi_{\varepsilon}(t)}{-\Delta-t}$$

le bord du secteur $T_{\varepsilon,M}$ est le triangle de sommets :

$$A\begin{vmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} M+\varepsilon \\ -(M+\varepsilon)tg\varepsilon \end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix} M+\varepsilon \\ (M+\varepsilon)tg\varepsilon \end{vmatrix}$$



la fonction $u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t)$ est nulle sur les côtés AB et AC car les fonctions ψ_{ε} et $\psi_{\varepsilon'}$ y sont nulles.

donc $$\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))dt = \int_{[B,C]} f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))dt$$

mais sur le segment [B,C] on a

$$f(t) = O(|t|^N)$$

$$u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t) = O\left(\frac{1}{|t|^k}\right)$$

donc $f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t)) = O\left(\frac{1}{|t|^4}\right)$ puis que $k-N \geq 4$

et $t=M+\varepsilon+iy \in [B,C]$

donc

$$\int_{[B,C]} \frac{1}{|t|^4}\,dt = 2i\int_0^{(M+\varepsilon)tg\varepsilon} \frac{1}{((M+\varepsilon)^2+y^2)^2}\,dy$$

ce qui donne

$$\int_{[B,C]} \frac{1}{|t|^4}\,dt \leq 2\,\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon} \quad \to \quad 0 \text{ si } M \to \infty$$

donc

$$\int_{T_\varepsilon} \partial[f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))] \wedge dt = \lim_{M\to\infty} \int_{\partial T_{\varepsilon,M}} \partial[f(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))]dt$$

$$= 0$$

et le résultat est établi.

Pour l'intégrale $\int_{T_\varepsilon} (u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))\bar\partial f(t) \wedge dt$

d'abord on a

$$(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))\bar\partial f(t)=\delta_0^{-N}(t)\delta^m(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))\delta_0^N(t)\delta^{-m}(t)\bar\partial f(t)$$

- le terme $\delta_0^{-N}(t)\delta^m(t)(u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t)) \in \varepsilon B$ dès que $m \geq 2$

où B est le disque borné complétant dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$ contenant l'ensemble borné

$\{\delta(t)(-\Delta-t)^{-1} / t \notin \mathbb{R}^+\}$.

- le terme $\delta_0^N(t)\delta^{-m}(t)\bar\partial f(t) \in L^1(T_\alpha)d\bar t$

Dans l'espace de Banach $\widehat{\mathbb{C}_B(-\Delta)}$ engendré par le disque borné complétant B contenant l'ensemble borné $\{\delta(t)(-\Delta-t)^{-1} / t \notin \mathbb{R}^+\}$ on a

$$\left\| \int_{T_\varepsilon} (u_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon',k}(t))\bar\partial f(t) \wedge dt \right\|_B \leq \varepsilon \int_{T_\alpha} \delta_0^N(t)\delta^{-m}(t)|\bar\partial f(t) \wedge dt|$$

le second membre tend vers 0 avec ε dès que $m \geq 2$.

Ainsi le critère de CAUCHY assure que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt$ existe dans $\widehat{\mathbb{C}_\delta(-\Delta)}$.

2) <u>Etape</u> : soit $u'_{\varepsilon,k}$, $y'_{\varepsilon,k}$) une autre famille qui vérifie le lemme 1

on forme

$$\int_{T_\varepsilon} f(t)\bar\partial u'_{\varepsilon,k}(t)dt - \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t)dt = \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar\partial(u'_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon,k}(t)) \wedge dt$$

$$= \int_{T_\varepsilon} \partial[f(t)(u'_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon,k}(t)] \wedge dt - \int_{T_\varepsilon} (u'_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon,k}(t))\bar\partial f(t) \wedge dt$$

comme précedemment on montre que la seconde intégrale tend vers 0 avec ε dès que $m \geq 2$.

Pour la première intégrale d'abord on calcule $u'_{\varepsilon,k}-u_{\varepsilon,k}$

$$u'_{\varepsilon,k}-u_{\varepsilon,k}=u'_{\varepsilon,k}[(-\Delta-t)u_{\varepsilon,k}+y_{\varepsilon,k}]-u_{\varepsilon,k}[(-\Delta-t)u'_{\varepsilon,k}+y'_{\varepsilon,k}]$$

$$=u'_{\varepsilon,k}y_{\varepsilon,k}-u_{\varepsilon,k}y'_{\varepsilon,k}$$

Comme précedemment, on considère le secteur $T_{\varepsilon,M}$ de sommets

$$A\left|\begin{matrix}-\varepsilon\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}M+\varepsilon\\-(M+\varepsilon)tg\varepsilon\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}M+\varepsilon\\(M+\varepsilon)tg\varepsilon\end{matrix}\right.$$

et on montre que

$$\int_{T_\varepsilon}\bar\partial[f(t)(u'_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon,k}(t))]\wedge dt=\lim_{M\to\infty}\int_{T_{\varepsilon,M}}\bar\partial[f(t)(u'_{\varepsilon,k}(t)-u_{\varepsilon,k}(t)]\wedge dt$$

$$=0$$

Ainsi la famille $\int_{T_\varepsilon} f(t)\bar\partial u'_{\varepsilon,k}(t)\wedge dt$ admet une limite indépendante de la famille $(u'_{\varepsilon,k},y'_{\varepsilon,k})$ vérifiant le lemme 1.

3) <u>Etape</u> : il reste à montrer que la limite ne dépend pas de l'entier p. En effet le lemme 2 nous dit : pour tout entier naturel $p\geq 1$ on a la relation

$$(p+1)f\,y^p_{\varepsilon,k}\bar\partial u_{\varepsilon,k}-p.f\,y^{p-1}_{\varepsilon,k}\,\bar\partial u_{\varepsilon,k}=\bar\partial(fy^p_{\varepsilon,k}u_{\varepsilon,k})-y^p_{\varepsilon,k}u_{\varepsilon,k}\,\bar\partial f$$

en intégrant les deux membres de cette égalité sur le secteur T_ε, et en remarquant d'après ce qui précède que :

$$\int_{T_\varepsilon}\bar\partial[f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)u_{\varepsilon,k}(t)]\wedge dt=0$$

et $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{T_\varepsilon} y^p_{\varepsilon,k}(t)u_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial f(t)\wedge dt=0$

on obtient que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}-\left(\frac{p+1}{2\pi}\right)\int_{T_\varepsilon} f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t)\wedge dt=\lim_{\varepsilon\to}-\frac{p}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} f(t)y^{p-1}_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t)dt$$

ainsi la famille $-\frac{p+1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} f(t)y^p_{\varepsilon,k}(t)\bar\partial u_{\varepsilon,k}(t)\wedge dt$ admet une limite indépendante de l'entier p.

On note par $$\lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{2i\pi} \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \quad dt = f[-\Delta]$$

il reste à montrer que l'application $f \to f[-\Delta]$ est linéaire bornée. En effet, l'application est évidemment linéaire et bornée ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Le théorème 1 assure l'existence d'une famille d'applications linéaires $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ bornées telles que pour chaque $N \in \mathbb{N}$, T_N est définie de

$$\mathcal{E}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \to \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$$

mais $\mathcal{E}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) = \varinjlim(\mathcal{E}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o), \Pi_{N,N'})$

donc il va en résulter une application linéaire T bornée, unique définie par $T = \varinjlim T_N$ vérifiant les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o) & \xrightarrow{T_N} & \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)} \\ & {\scriptstyle \Pi_N} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle T} & \\ & \mathcal{E}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) & \end{array}$$

telle que $T \circ \Pi_N = T_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$

où Π_N désigne l'injection canonique bornée.

REMARQUE.

Si f est holomorphe dans le secteur T_α et à croissance tempérée, alors la suite

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{T_\varepsilon} f(t)\bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt$$

est stationnaire.

COROLLAIRE 1.

a) si $f(t) = 1$ alors $-\frac{1}{2i\pi} \int_{T_\varepsilon} \bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = 1$ si $k \geq 4$

b) si $f(t) = t$ alors $-\frac{1}{2i\pi} \int_{T_\varepsilon} t\bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = -\Delta$ si $k \geq 5$

DEMONSTRATION.

pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ on a l'identité suivante

$$-(-\Delta-t)^{-1} = -\frac{1}{t} + \frac{\Delta}{t(t+\Delta)}$$

a) si $f(t) = 1$ on a

$$\int_{T_\varepsilon} \bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = \lim_{M\to\infty} \int_{T_{\varepsilon,M}} \bar{\partial} u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt$$

où $T_{\varepsilon,M} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ -\varepsilon \leq \mathrm{Re}\ z \leq M \text{ et } |\mathrm{Arg}(z+\varepsilon)| \leq \varepsilon\}$

sur chaque secteur on peut appliquer la formule de STOCKS

mais $u_{\varepsilon,k}(t) = \dfrac{1-\psi_\varepsilon(t)}{-\Delta-t}$

en utilisant l'identité ci-dessus on obtient

$$u_{\varepsilon,k}(t) = -\frac{1}{t} + \frac{y_{\varepsilon,k}(t)}{t} + \frac{1-y_{\varepsilon,k}(t)}{t(t+\Delta)}\,\Delta$$

donc

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} u_{\varepsilon,k}(t)dt = 1 - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} \frac{y_{\varepsilon,k}(t)}{t}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} \frac{1-y_{\varepsilon,k}(t)}{t(t+\Delta)}\,dt\ \Delta$$

vu que le support de la fonction $y_{\varepsilon,k}$ est dans le secteur T_ε on vérifie sans peine que :

$$-\lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} \frac{y_{\varepsilon,k}(t)}{t}\,dt = 0$$

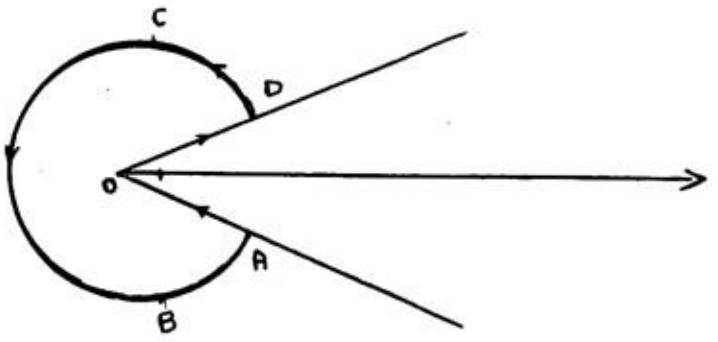
$$-\lim_{M\to\infty} -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_{\varepsilon,M}} \frac{1-y_{\varepsilon,k}(t)}{t(t+\Delta)}\,dt = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial T_\varepsilon} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt$$

nous montrons que

$$\int_{\partial T_\varepsilon} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt = 0$$

En effet, la fonction $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \to \dfrac{1}{t(t+\Delta)}$ est holomorphe.

Considérons le contour Γ (OA,AB,BC,CD,DO) fermé



donc $\int_\Gamma \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt$

où Γ_1 est le chemin DO,OA d'angle 2α, et Γ_R est le chemin (AB,BC,CD)

- sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ on a $(-\Delta-t)^{-1}=O\left(\frac{1}{\delta(t)}\right) = \frac{1}{|R\sin\theta|}$ où $\theta \in [-\varepsilon, -\frac{\pi}{2}]$

$t=R\,e^{i\theta}$

$$\left\|\int_{AB} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt\right\| \underset{B}{\sim} \frac{1}{R} \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{1}{|\sin\theta|}\,d\theta \to 0 \quad \text{si } R \to \infty$$

- sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ on a $(-\Delta-t)^{-1} = O\left(\frac{1}{\delta(t)}\right) = \frac{1}{R}$

$t = R\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

donc $$\left\|\int_{BC} \frac{1}{t(-\Delta-t)}\,dt\right\| \underset{B}{\sim} \frac{1}{R}\,\pi \to 0 \text{ si } R \to \infty$$

- sur l'arc $\overset{\frown}{CD}$ on a $(-\Delta-t)^{-1} = O\left(\frac{1}{\delta(t)}\right) = \frac{1}{R\sin\theta}$

$t = R\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi-\varepsilon]$

donc $$\left\|\int_{CD} \frac{1}{t(t+\Delta)}\,dt\right\| \underset{B}{\sim} \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{|R\sin\theta|}\,d\theta \to 0 \text{ si } R \to \infty$$

finalement on obtient que

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{1}{t(t+\Delta)}dt = \int_{\partial T_\varepsilon} \frac{1}{t(t+\Delta)}dt = 0$$

donc $$-\frac{1}{2i\pi} \int_{T_\varepsilon} \bar\partial u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = 1$$

ce qui établi le point a) du corollaire.

pour établir le point b) du corollaire il suffit de remarquer que la famille $(u_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})$ vérifie la relation

$$(-\Delta - t)u_{\varepsilon,k}(t) + y_{\varepsilon,k}(t) = 1$$

donc $$(-\Delta - t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t) + \bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t) = 0 \qquad \forall k \geq 1$$

donc si $k \geq 5$ on a

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon}(-\Delta - t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon}\bar{\partial}y_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = 0$$

donc

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} t\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t) \wedge dt = -\Delta$$

ce qui établi le corollaire.

En vérité, le morphisme de b-espaces T défini par $T = \varprojlim_{N} T_N$ est un morphisme de b-algèbres, c'est-à-dire, il vérifie en plus la relation

$$(f.g)[-\Delta] = f[-\Delta] \circ g[-\Delta]$$

qui sera établie dans le paragraphe suivant.

3°) Produit tensoriel

Le but de ce paragraphe est d'établir la relation

$$(f.g)[-\Delta] = f[-\Delta] \circ g[-\Delta]$$

c'est-à-dire de montrer que le morphisme de b-espaces donné par le Théorème 1 est effectivement un morphisme de b-algèbres.

D'abord on a :

PROPOSITION 7.

Soit $(u_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})_{\substack{\varepsilon>0 \\ k\in\mathbb{N}^*}}$, $(v_{\varepsilon,k'}, z_{\varepsilon,k'})_{\substack{\varepsilon>0 \\ k\in\mathbb{N}^*}}$ deux familles vérifiant le lemme 1, on pose :

$$U_{\varepsilon,k,k'}(s,t) = u_{\varepsilon,k} \otimes z_{\varepsilon,k'}(s,t) = u_{\varepsilon,k}(s)z_{\varepsilon,k'}(t)$$
$$V_{\varepsilon,k'}(s,t) = 1 \otimes v_{\varepsilon,k'}(s,t) = v_{\varepsilon,k'}(t)$$
$$Z_{\varepsilon,k,k'}(s,t) = y_{\varepsilon,k} \otimes z_{\varepsilon,k'}(s,t) = y_{\varepsilon,k}(s)z_{\varepsilon,k'}(t)$$

Alors la famille $[(U_{\varepsilon,k,k'}, V_{\varepsilon,k'}), Z_{\varepsilon,k,k'}]$ vérifie le lemme 1 de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}_\delta(-\Delta)$

DEMONSTRATION.

La vérification des points du lemme 1 est immédiate.

La forme différentielle $W_{\varepsilon,k,k'}$

On considère la forme différentielle de type (0,1) définie par :

$$W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)=\frac{1}{2}\,[u_{\varepsilon,k}(s)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k'}(t)-v_{\varepsilon,k'}(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(s)]$$

$W_{\varepsilon,k,k'}$ est continue sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, et vérifie

- $\mathrm{Supp}(W_{\varepsilon,k,k'}) \subset T_\varepsilon \times T_\varepsilon$, $\forall k,k' \in \mathbb{N}^*$
- $d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)=\bar{\partial}_s u_{\varepsilon,k}(s) \wedge \bar{\partial}_t v_{\varepsilon,k'}(t)$.

On considère la fonction τ définie sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par :

$$\tau(s,t) = \delta(s)+\delta(t)$$

où $\delta(t) = \dfrac{d(t,\mathbb{R}^+)}{1+d(t,\mathbb{R}^+)}$

τ est évidemment lipschitzienne sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On a le Théorème suivant :

THEOREME 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ et $g \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N'}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ alors la fonction définie par $f \otimes g(s,t)=f(s)g(t)$ est dans $\mathcal{C}^1_{\alpha,N+N'}[(-\Delta,-\Delta),m,\tau,\delta_o\times\delta_o]$, de plus si : $\inf(k-N,k'-N') \geq 4$ on a :

$$f \otimes g[-\Delta,-\Delta]=f[-\Delta]\circ g[-\Delta]$$

DEMONSTRATION.

On voit clairement que la fonction définie par $f \otimes g(s,t)=f(s).g(t)$ est dans $\mathcal{C}^1_{\alpha,N+N'}[(-\Delta,-\Delta),m,\tau,\delta_o \otimes \delta_o]$ dès que: $f \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ et $g \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N'}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$.

La forme différentielle $(s,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to f \otimes g(s,t)d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)$ est continue, à support dans le produit des secteurs $T_\varepsilon \times T_\varepsilon$.

De plus on a :

$$f \otimes g(s,t)=O(|s|^N|t|^{N'}) \text{ lorsque } |s| \text{ et } |t| \to \infty$$

$$d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)=\frac{1}{\varepsilon^4}\,O\left(\frac{1}{|s|^k|t|^{k'}}\right) \text{ lorsque } |s| \text{ et } |t| \to \infty$$

donc

$$f \otimes g(s,t)d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)=\frac{1}{\varepsilon^4}\, O\left(\frac{1}{|s|^4|t|^4}\right) \text{ si } |s| \text{ et } |t| \to \infty$$

puisqu'on a $\inf (k-N,k'-N') \geq 4$.

Ainsi la forme différentielle $f \otimes g(s,t)d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)$ est intégrable sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et :

$$\left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{T_\varepsilon \times T_\varepsilon} f \otimes g(s,t)d''W_{\varepsilon,k,k'}(s,t)dsdt$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} f(s)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(s)ds\right)\right)\left(\left(-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} g(t)\bar{\partial}v_{\varepsilon,k'}(t)dt\right)\right)$$

faisons tendre ε vers 0, donc le membre de gauche a une limite, en utilisant le Théorème 1 pour le membre de droite on obtient :

$$f \otimes g[-\Delta,-\Delta] = f[-\Delta] \circ g[-\Delta].$$

Invariance par transformations linéaires injectives :

Toute transformation linéaire injective de $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, se décompose en un produit de transformations linéaires bijectives de $\mathbb{C}$, de $\mathbb{C}^2$ et d'injections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

PROPOSITION 8.

Soit A une transformation linéaire bijective de $\mathbb{C}$, qu'on prolonge à $\mathbb{C}_\delta(-\Delta)$ alors

a) $f \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-A(\Delta),m,\delta,\delta_o) \iff f \circ A \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

b) de plus si $k-N \geq 4 \Rightarrow f[-A(\Delta)] = f \circ A[-\Delta]$

DEMONSTRATION.

A étant une transformation linéaire bijective de $\mathbb{C}$, donc tout secteur T_ε de $\mathbb{C}$, se transforme en un secteur $A(T_\varepsilon)$ de $\mathbb{C}$.

L'équivalence dans le point a) est immédiate.

En établit le point b)

Soit $(u_{\varepsilon,k}, y_{\varepsilon,k})_{\substack{\varepsilon>0 \\ k\in\mathbb{N}^*}}$ un système de fonctions vérifiant le Lemme 1 si de plus on a

$$(-A(-\Delta)-t)u_{\varepsilon,k}(t)+y_{\varepsilon,k}(t)=1 \ , \ \forall t \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow (-A(\Delta)-A(s))u_{\varepsilon,k}oA(s)+y_{\varepsilon,k}oA(s)=1 \ , \ \forall s \in \mathbb{C}$$

donc le système $(u_{\varepsilon,k} \circ A, y_{\varepsilon,k} \circ A)_{\substack{\varepsilon>0 \\ k\in\mathbb{N}^*}}$, vérifie aussi le lemme 1 et

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{A(T_\varepsilon)} f(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(t)dt = -\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} foA(s)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}oA(s)ds$$

Par passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, et puisque $k-N \geq 4$, on obtient :

$$f[-A(\Delta)] = f \circ A[-\Delta]$$

Soit l'injection canonique $s \in \mathbb{C} \to (s,0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, il est clair que

$$foj \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \iff f \in \mathcal{C}^1_{\alpha,N}[(-\Delta,0),m,\delta oj,\delta_o oj]$$

D'une part on considère une famille $(u_{\varepsilon,k},y_{\varepsilon,k})_{\substack{\varepsilon>0 \\ k\ \mathbb{N}^*}}$ un système de fonctions vérifiant le lemme 1.

D'autre part on considère la fonction $v(t)=-\frac{1}{t}$, $t\neq 0$, comme dans le lemme 1, on régularise la fonction V, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction φ_ε définie et de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, vérifiant

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leq \varepsilon/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

et pour toute dérivation D d'ordre A on a : $\varepsilon|D\varphi_\varepsilon(t)| \leq M$ où M est une constante indépendante de ε.

On pose

$$V_\varepsilon(t) = (1-\varphi_\varepsilon(t))V(t)$$

alors le système $(V_\varepsilon,\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, et vérifie la relation

$$-tV_\varepsilon(t)+\varphi_\varepsilon(t) = 1 , \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

comme dans le Théorème 2, on considère la famille :

$$U_{\varepsilon,k}(s,t) = u_{\varepsilon,k} \otimes \varphi_\varepsilon(s,t) = u_{\varepsilon,k}(s)\varphi_\varepsilon(t)$$

$$V_{\varepsilon,k'}(s,t) = 1 \otimes v_\varepsilon(s,t) = v_\varepsilon(t)$$

$$Z_{\varepsilon,k}(s,t) = y_{\varepsilon,k} \otimes \varphi_\varepsilon(s,t) = y_{\varepsilon,k}(s)\varphi_\varepsilon(t)$$

on considère la forme différentielle $W_{\varepsilon,k}(s,t)=\frac{1}{2}\left[u_{\varepsilon,k}(s)\bar{\partial}v_{\varepsilon}(t)-v_{\varepsilon}(t)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(s)\right]$

donc

$$(-\frac{1}{2i\pi})^2\int_{T_\varepsilon\times\Gamma_\varepsilon} f(s,0)\bar{\partial}w_{\varepsilon,k}(s,t)dsdt=(-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} f(s,0)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(s)ds)(-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon}\bar{\partial}v_{\varepsilon}(t)dt)$$

où Γ_ε est le disque de centre 0 et de rayon ε.

donc

$$(-\frac{1}{2i\pi})^2\int_{T_\varepsilon\times\Gamma_\varepsilon} f(s,0)\bar{\partial}W_{\varepsilon,k}(s,t)dsdt=-\frac{1}{2i\pi}\int_{T_\varepsilon} foj(s)\bar{\partial}u_{\varepsilon,k}(s)ds$$

si $k-N\geq 4$, par passage à la limite ($\varepsilon\to 0$) on obtient que

$$f[-\Delta,0] = foj[-\Delta]$$

Si A est une transformation linéaire bijective de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, qu'on étend à $\mathfrak{C}_\delta(-\Delta)\times\mathfrak{C}_\delta(-\Delta)$ alors on a :

$$foA\in\mathfrak{C}^1_{\alpha,N}[(-\Delta,-\Delta),m,\tau oA,(\delta_o\times\delta_o)oA]\iff f\in\mathfrak{C}^1_{\alpha,N}[(-A(\Delta),-A(\Delta)),m,\tau,\delta_o\times\delta_o]$$

et pour les mêmes raisons que ci-dessus on peut former :

$$foA[-\Delta,-\Delta] = f[-A(\Delta),-A(\Delta)].$$

COROLLAIRE 1.

Soit A l'injection linéaire $s\in\mathbb{C}\to(s,s)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, qu'on étend à $\widehat{\mathfrak{C}_\delta(-\Delta)}\to\widehat{\mathfrak{C}_\delta(-\Delta)}\times\widehat{\mathfrak{C}_\delta(-\Delta)}$

si $f\in\mathfrak{C}^1_{\alpha,N}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ et $g\in\mathfrak{C}^1_{\alpha,N'}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ alors la fonction définie par $(f\otimes g)oA(s)=f(s).g(s)$ est dans $\mathfrak{C}^1_{\alpha,N+N'}(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ de plus si $k+k'-N-N'\geq 4$ on a

$$(f\otimes g)oA[-\Delta] = (f.g)[-\Delta]$$

Le corollaire montre qu'on a $(f.g)[-\Delta]=f[-\Delta og[-\Delta]$, c'est la relation cherchée. Ainsi on a établi que le morphisme de b-espaces donné, par le théorème 1 est bien un morphisme de b-algèbres.

COROLLAIRE 2.

Le noyau du morphisme de b-algèbres: $f\to f[-\Delta]$ est le b-idéal des fonctions f qui s'annulent sur $\mathbb{R}^+$.

CHAPITRE III

Nous donnons un Théorème de surjection utile pour identifier la b-algèbre abstraite $\mathcal{C}_\delta\widehat{(-\Delta)}$ à la b-algèbre des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ tempérées ainsi que toutes ses dérivées pour la même filtration.

CHAPITRE III. Surjection sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

Au chapitre II, nous avons défini la b-algèbre $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ des fonctions f, définies et de classe C^1 dans le secteur T_α vérifiant pour un certain entier naturel N .

$$\sup_{T_\alpha}\left|f(t)\right|\delta_o^N(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{T_\alpha}\delta_o^N(t)\delta^{-m}(t)\left|\bar\partial f(t)\wedge dt\right| < +\infty$$

où $\delta_o(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(t)^2}}$

$$\delta(t)=\frac{d(t,\mathbb{R}^+)}{1+d(t,\mathbb{R}^+)}$$

avec $d(t,\mathbb{R}^+)$ = distance du point $t\in\mathbb{C}$, à $\mathbb{R}^+$

m entier naturel positif.

si $m_2\geq m_1$ alors l'injection canonique de

$$\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m_2\delta,\delta_o)\ \to\ \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m_1,\delta,\delta_o)$$

est continue.

Dans cette partie, on se propose de montrer que toute fonction f définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, tempérée ainsi que toutes ses dérivées pour la même filtration N, se relève en une fonction $\overset{\gamma}{f}$ définie et de classe C^1 dans le secteur T_α, vérifiant pour tout entier naturel m

$$\sup_{T_\alpha}\left|\overset{\gamma}{f}(t)\right|\delta_o^N(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{T_\alpha}\delta_o^N(t)\delta^{-m}(t)\left|\bar\partial f(t)\wedge dt\right| < +\infty$$

c'est-à-dire que $\overset{\gamma}{f}$ appartient à la b-algèbre $\bigcap\limits_{m\geq 0}\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$.

D'abord définissons la b-algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$.

1°) Définition de la b-algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

On désigne par $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ l'algèbre des fonctions f définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, telles qu'il existe un entier naturel N, possédant la propriété suivante :

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \exists C_k>0\ ,\ \left|\sup_{\mathbb{R}^+}\delta_o^N(x)\left|f^{(k)}(x)\right|\right|\leq C_k$$

c'est-à-dire, la fonction f est tempérée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^+$, pour la même filtration N.

Sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ on a une base de bornologie naturelle formée par les disques bornés complétants définis par

$$B_{N,C_k}=\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o) \mid \sup_{\mathbb{R}^+} \delta_o^N(t)|f^{(k)}(x)| \leq C_k \}$$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ munie de cette base de bornologie est une b-algèbre.

On a le théorème suivant :

THEOREME 3 :

La restriction de $\bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ est bornée.

DEMONSTRATION:

1°) Nous montrons d'abord que si $f \in \bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$ alors sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est de classe C^∞.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on considère le disque fermé centré en x, et de rayon ε

$$V_\varepsilon(x) = \{t \in T_\alpha \mid |t-x| \leq \varepsilon\}$$

$f \in \bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$, alors f est de classe C^1 sur $V_\varepsilon(x)$ par la formule de CAUCHY-POMPEIU [6] on a

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V_\varepsilon(x)} \frac{f(t)}{t-x}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{V_\varepsilon(x)} \frac{\bar\partial f(t)\wedge dt}{t-x}$$

- pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \in \partial V_\varepsilon(x) \to \frac{f(t)}{(t-x)^m}$ est intégrable sur le bord de $V_\varepsilon(x)$.

- pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \in V_\varepsilon(x) \to \frac{\partial}{\partial \bar t} f(t) \frac{1}{(t-x)^m}$ est intégrable sur $V_\varepsilon(x)$ puisque on a :

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar t} f(t) \frac{d\bar t\wedge 1}{(t-x)^m}\right| = \left(\frac{\delta(t)}{|t-x|}\right)^m \delta^{-m}(t)\left|\frac{\partial}{\partial \bar t} f(t)\, d\bar t\right|$$

$$\leq \delta^{-m}(t)\left|\frac{\partial}{\partial \bar t} f(t)\, d\bar t\right| \in L^1(V_\varepsilon(x))$$

ainsi, on peut dériver autant de fois que l'on souhaite par rapport à x sous le signe somme l'égalité (1), donc pour tout entier naturel n on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\partial V_\varepsilon(x)} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt - \frac{n!}{2i\pi}\int_{V_\varepsilon(x)} \frac{\bar\partial f(t)dt}{(t-x)^{n+1}}$$

cette relation étant valable en tout point $x \in \mathbb{R}^+$, on en déduit alors que la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est de classe C^∞ .

2°) Nous montrons, maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{\mathbb{R}^+} \delta_o^N(x)|f^{(n)}(x)| < \infty$ c'est-à-dire que la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ est tempérée ainsi que toutes ses dérivées pour la même filtration N.

En effet, d'après le point 1°), en tout point $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V_\varepsilon(x)} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt - \frac{1}{2i\pi}\int_{V_\varepsilon(x)} \frac{\bar\partial f(t)\wedge dt}{(t-x)^{n+1}}$$

multiplions les deux membres de cette égalité par $\delta_o^N(x)$, on obtient

$$\delta_o^N(x)|f^{(n)}(x)| \le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+|t|^2}{1+x^2}\right)^{N/2} \delta_o^N(t)\,\frac{|f(t)|}{\varepsilon^n}\,d\theta$$

$$+ \frac{n!}{2\pi}\int_{V_\varepsilon(x)} \left(\frac{\delta_o(x)}{\delta_o(t)}\right)^N \left(\frac{\delta(t)}{|t-x|}\right)^{n+1} \delta_o^N(t)\delta^{-n-1}(t)|\bar\partial f(t)|\wedge dt)$$

$t \in V_\varepsilon(x)$ $\quad t = x + re^{i\theta}$ avec $r \in [0,\varepsilon]$

où ε désigne le rayon du disque fermé $V_\varepsilon(x)$

donc $\quad |t|^2 \le (x+\varepsilon)^2$

Le plus grand disque fermé, centré au point $x \in \mathbb{R}^+$, et contenu dans le secteur T_α, a un rayon au plus égal à

$$\varepsilon(x) = (x+\alpha)\sin\alpha.$$

donc

$$t \in V_\varepsilon(x) \qquad |t|^2 \le (x+(x+\alpha)\sin\alpha)^2$$

ainsi la fonction $t \in V_\varepsilon(x) \to \frac{1+|t|^2}{1+x^2}$ est bornée uniformément en x, donc

$\exists M > 0$

$$\left(\frac{1+|t|^2}{1+x^2}\right)^{N/2} \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

ce qui donne

$$\delta_o^N(x)|f^{(n)}(x)| \leq n!\,\frac{M}{\varepsilon^n}\sup_{T_\alpha}\delta_o^N(t)|f(t)| + n!\,M\,\frac{1}{2\pi}\int_{T_\alpha}\delta_o^N(t)\delta^{-n-1}(t)|\bar\partial f(t)\wedge dt$$

donc $\exists M_n > 0 \quad : \sup_{\mathbb{R}^+}\delta_o^N(t)|f^{(n)}(x)| \leq M_n < +\infty.$

Ce qui établi que la restriction de f à $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

- La restriction de $\bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ est évidemment bornée.

2°) Surjection sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

Avant d'énoncer le théorème de surjection, un Lemme.

LEMME 3.

Soit f une fonction C^∞, à support compact dans $\mathbb{R}$ alors f admet un relèvement $\tilde f$ de classe C^1 dans $\mathbb{C}$ et à support compact vérifiant pour tout entier naturel m

$$\bar\partial\tilde f(z) = O(\delta^m(z))$$

où $\delta(z) = \frac{d(z,\mathbb{R}^+)}{1+d(z,\mathbb{R}^+)}$

DEMONSTRATION.

Soit $K = \mathrm{Supp}(f)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = \sup_K |f^{(n)}(x)|$

Soit δ_n une suite de nombres réels supérieurs ou égaux à 1.

On peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M_n \leq \delta_n$.

Soit ψ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact convexe contenu dans l'intervalle $]-1,1[$, valant 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{n+1} \delta_p$$

$$\psi_n(y) = \psi(\alpha_n y)$$

Alors $\alpha_n \to \infty$ si $n \to \infty$, et la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\geq 0}$ vérifie

- ψ_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact contenu dans $]-\frac{1}{\alpha_n}, \frac{1}{\alpha_n}[$
- $\psi_n(y) = 1$ si $y \in [-\frac{1}{2\alpha_n}, \frac{1}{2\alpha_n}]$
- $\mathrm{Supp}(\psi_{n+1}) \subset \mathrm{Supp}(\psi_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la série (1) $\tilde{f}(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$

La série (1) converge en tout point $z=x+iy$, car elle est localement finie, elle est même de classe C^∞ en tout point $z=x+iy$ tel que $y \neq 0$.

La continuité et la dérivabilité de $\tilde{f}$ réside uniquement au point $y=0$.

- <u>continuité de $\tilde{f}$ au point</u> $y=0$

le terme général de la série (1) vérifie

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n\right| \leq \frac{1}{n!} \delta_n \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^n < \frac{1}{n!}$$

et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

donc la série (1) converge uniformément au point $y=0$, donc $\tilde{f}$ est continue au point $y=0$ et $\lim_{y\to 0} \tilde{f}(x+iy) = f(x)$

- <u>Dérivabilité de $\tilde{f}$ au point</u> $y=0$

Dérivons le terme général de la série (1) par rapport à x, on obtient

$$\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$$

et $\left|\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi_n(y)(iy)^n\right| \leq \frac{1}{n!} \delta_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^n < \frac{1}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$ est uniformément convergente on peut alors dériver terme à terme la série (1) par rapport à x on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$$

et $\lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x+iy) = f^{(1)}(x)$

Dérivons le terme général de la série (1) par rapport a y on obtient

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\psi_n'(y)(iy)^n + \frac{i}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^{n-1}$$

on vérifie sans peine que chaque terme de cette somme et le terme général d'une série uniformément convergente au voisinage du point y=0, on peut alors dériver terme à terme la série (1) par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{f}(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[f^{(n)}(x)\psi_n'(y) + if^{(n+1)}(x)\psi_{n+1}(y)\right] (iy)^n$$

et $\lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{f}(x+iy) = if^{(1)}(x)$

Ainsi les dérivées partielles d'ordre 1 de $\tilde{f}$ existent et sont continues, donc la fonction $\tilde{f}$ est de classe C^1 dans $\mathbb{C}$, à support compact contenu dans $\text{supp}(f) \times [-\frac{1}{\alpha_o}, \frac{1}{\alpha_o}]$.

Il reste à vérifier que pour tout entier naturel k on a :

$$\bar{\partial}\tilde{f}(z) = O(\delta^k(z))$$

en effet, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)$

donc

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n+1)}(x)\left(\psi_n(y) - \psi_{n+1}(y)\right)(iy)^n$$

$$- \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(x)\psi_n'(y)(iy)^n$$

pour tout entier k; on vérifie que :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(z) = O(|y|^k) = O(\delta^k(z))$$

c'est-à-dire que $\tilde{f} \in \bigcap_{m \geq 0} C^1_\alpha(-\Delta, m, \delta, \delta_o)$

le lemme 3 est alors établi.

On peut énoncer le théorème de surjection :

THEOREME 4.

La restriction de $\bigcap_{m \geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta, m, \delta, \delta_o) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \delta_o)$ est surjective.

DEMONSTRATION.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, \delta_o)$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ par le théorème d'Emile BOREL, on peut toujours la prolonger au delà de 0, de façon C^∞ c'est-à-dire que : pour tout $\alpha > 0$, $\exists$ F $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\alpha, +\infty[$ telle que pour tout n on a:

$$D^n F(-\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad F/_{\mathbb{R}^+} = f$$

on pose :

$$I_\alpha = [-\alpha, +\infty[$$

Soit l'intervalle ouvert $]1-\varepsilon, 2+\varepsilon[$, où ε est un nombre réel strictement positif; la famille $(2^j]1-\varepsilon, 2+\varepsilon[- \alpha)_{j \in \mathbb{Z}}$ forme un recouvrement ouvert localement fini de l'intervalle ouvert $]-\alpha, +\infty[$.

Soit ν une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, à support compact contenu dans l'intervalle $]1-\varepsilon, 2+\varepsilon[$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\nu_j(x) = \frac{\nu(2^j(x+\alpha))}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu(2^k(x+\alpha))} \quad , \quad \forall x \in]-\alpha, +\infty[$$

Alors ν_j est C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, à support compact contenu dans l'intervalle ouvert $2^{-j}]1-\varepsilon, 2+\varepsilon[- \alpha$ et $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \nu_j(x) = 1$, $\forall x > -\alpha$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose

$$F_j = \nu_j F$$

F_j est alors C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact, par le lemme 3, on peut la relever en une fonction $\tilde{F}_j$ de classe C^1 dans le secteur T_α, vérifiant :

$$\tilde{F}_{j/Supp(F_j)} = F_j$$

$$\bar{\partial}\tilde{F}_j(z) = O(\delta^k(z)) \text{ pour tout entier naturel } k.$$

la fonction $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{F}_j \in \bigcap_{m \geq 0} \mathfrak{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

et $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{F}_j \Big/ \mathbb{R}^+ = f$

d'où la surjectivité de la restriction.

REMARQUE.

Il est possible d'avoir un relèvement de classe C^k, il suffit dans le lemme 3, de choisir la suite $\alpha_n = \sum_{p=0}^{n+k} \delta_p$.

Si on désigne par $I_m = \{f \in \mathfrak{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) / f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}^+\}$ est un b-idéal de $\mathfrak{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$; et soit le b-idéal $\bigcap_{m \geq 0} I_m$ alors le théorème 4 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE: $\bigcap_{m \geq 0} \mathfrak{C}^1_m(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \Big/ \bigcap_{m \geq 0} I_m \to \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

La restriction est bijective, bornée.

DEMONSTRATION.

La preuve est immédiate.

3°) Isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ et $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

dans cette partie, on démontre le Théorème suivant

THEOREME 5.

Les b-algèbres $\widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$ sont bornologiquement isomorphes.

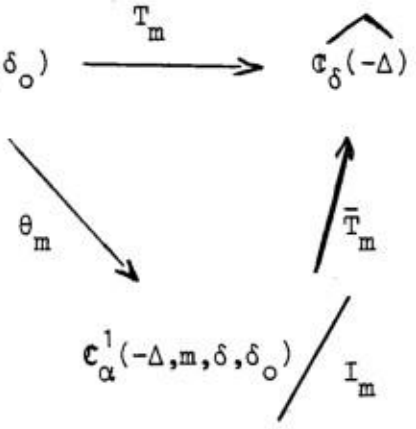
DEMONSTRATION.

Par le Théorème 1, chap.II, on a le morphisme de b-algèbres :

$$T_m = \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \to \widehat{\mathcal{C}_\delta(-\Delta)}$$
$$f \to f[-\Delta]$$

Son noyau est $\mathrm{Ker}T_m=\{f \in \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \mid f_{|\mathbb{R}^+} \equiv 0\}$

C'est un b-idéal de $\mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$, donc T_m induit un morphisme de b-algèbres $\bar{T}_m$ injectif, vérifiant le diagramme suivant



tel que $\bar{T}_m \circ \theta_m = T_m$

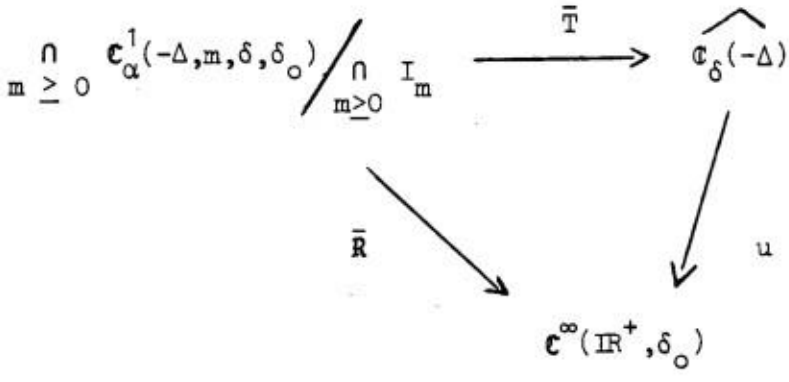
Où θ_m est le morphisme de b-algèbres surjectif.

Par le corollaire du Théorème 4, chap.III, on a :

La restriction $\bar{R} : \bigcap_{m \geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o) \Big/ \bigcap_{m\geq 0} I_m \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\delta_o)$

est un morphisme de b-algèbres bijective :

d'autre part les $\bar{T}_m$ induisent un morphisme de b-algèbres $\bar{T}$ injectif vérifiant le diagramme suivant :



$u \circ \bar{T} = \bar{R}$

- Le morphisme u est bijectif, car la surjection de u provient du Théorème 4 •

u injective car :

$f \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow u(f)=0 \Rightarrow \exists G \in \bigcap_{m\geq 0} \mathcal{C}^1_\alpha(-\Delta,m,\delta,\delta_o)$

$G_{|\mathbb{R}^+} \equiv 0 \Rightarrow G \in \bigcap_{m\geq 0} I_m \Rightarrow G[-\Delta]=0$

$G[-\Delta]=f \equiv 0$. d'où l'injection.

ce qui achève la démonstration du Théorème 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.BOURBAKI: Algèbre commutative ch.IV et V.
Théories spectrales. Hermann, Paris (1967)

[2] H.BUCHWALTER: Publication du Département de Mathématiques, Lyon 1965, t.2 Fasc.1.

[3] M.HEMDAOUI: Approximation analytique sur les compacts de $\mathbb{C}^n$. Thèse de 3ème cycle, Février 1982, Lille.

[4] H.HOGBE-NLEND: Théorie des Bornologies et Applications. Pub.Univ.Bordeaux, Mars 1971.

Complétion, Tenseurs et nucléarité en Bornologie. J.Math. Pures et Appliquées, 49 (1970) p.193-288.

[5] NGUYEN The Hoc: Croissance des coefficients spectrauxet calcul fonctionnel. Thèse année académique 1975-1976, U.L.B., Bruxelles.

[6] VASILESCU-FLORIAN HORIA: Analytic functional calculus and spectral decompositions. D.Reidel Publishing company.

[7] L.WAELBROECK: Calcul symbolique lié à la croissance de la résolvante. Conférence, 14 juin 1964, Milano.

The Holomorphic fonctional calculus and non Banach Algebras. Algebras in Analysis 187-254 (Edit.by T.J.Williamson), Acad. Press, 1975.

Calcul symbolique dans les algèbres commutatives. C.R.Acad. Sc. v.238 (1954) p.556.

[8] W.WROBEL : Extension du calcul fonctionnel holomorphe et application à l'approximation. Revue de Math. N°II, Institue Elie Cartan, Nancy 1972.