ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

des TRAVAUX DU

# IX$^e$ CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHILOSOPHIE

(Congrès Descartes)

(PARIS, 1-6 AOUT 1937)



# EXTRAIT

PARIS
HERMANN ET C$^{ie}$. ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

XXXII

# Une solution des paradoxes de la logique et ses conséquences pour la conception de l'infini

Ch. PERELMAN (Bruxelles).

---

SOMMAIRE. — La recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour éviter les antinomies de la théorie des ensembles nous amène à formuler deux règles (dont le champ d'application dépend des directives du système donné) qui défendent l'introduction, dans le système, de certaines définitions non-prédicatives. L'observation de ces règles limite l'application de l'opération cantorienne, de sorte qu'on en arrive à distinguer, parmi les ensembles infinis, ceux dont la puissance fait partie de la série des alephs, et ceux dont la puissance dépasse n'importe lequel des termes de cette série.

A l'intérieur d'un système déductif, considéré comme non-contradictoire, il est possible de construire une antinomie quand, à partir des axiomes de ce système on peut, en se servant de directives admises, aboutir à l'affirmation d'une proposition et de sa négation.

Plusieurs solutions ont été proposées pour sauver des paradoxes la théorie des ensembles, telle qu'elle a été développée par Cantor et par ses successeurs ayant conservé le concept « naïf » de « classe » ou d'« ensemble ». Ces diverses solutions ont pour but de limiter la théorie des ensembles classique, de sorte que l'on obtienne un système déductif exempt de contradiction et aussi riche que possible. Cependant tout le monde se rend parfaitement compte du caractère *arbitraire* de ces limitations. En évitant la contradiction on parvient, certes, de cette façon, à formuler une condition suffisante pour que les antinomies ne se produisent plus, mais cette condition n'est nullement nécessaire. Il en résulte deux conséquences regrettables : d'une part, ces limitations, trop importantes, écartent des propositions dont l'affirmation ne présente aucun inconvénient ; d'autre part, comme ces règles limitatives ne constituent pas des conditions suffisantes et nécessaires pour éviter les antinomies, il est impossible de comprendre pourquoi leur transgression entraînerait, dans chaque cas, des contradictions dans le système.

La solution adéquate du problème des antinomies semble être l'indication d'une règle qui serait une condition non seulement suffisante, mais aussi nécessaire, pour éviter les paradoxes, une règle dont la transgression impliquerait contradiction. Elle sera en rapport étroit avec le principe de contradiction, de sorte que l'on puisse comprendre immédiatement pourquoi sa transgression introduit des antinomies dans le système.

Notre thèse consiste dans l'affirmation que les antinomies résultent de l'introduction, dans le système, de *certaines* définitions non-prédicatives, dont nous tâcherons de préciser la forme dans les pages qui suivent. A cause de la suite de nos développements, nous formulerons les règles prohibant de telles définitions en termes de « classe » ; il est facile de le faire en termes de « fonction ». Nous aboutirons à ces règles à l'aide de généralisations successives d'une équivalence violant ouvertement le principe de contradiction.

En première approximation, les antinomies de la théorie des ensembles paraissent résulter de la définition d'un ensemble $a$, dont les éléments ne sont contenus dans *aucun* ensemble. Symboliquement,

$$(\mathrm{E})(x) : x \,\varepsilon\, a \,.\, \equiv \,.\, \sim x \,\varepsilon\, \mathrm{E} \qquad (1)$$

Comme (1) est affirmé pour toutes les valeurs de E, donc également pour $a$, il est évident que l'équivalence est fausse, car elle aboutit à une contradiction pour l'argument $a$, à la place de E.

Pour qu'il y ait contradiction, il n'est cependant pas nécessaire que l'équivalence (1) soit affirmée pour toutes les valeurs de E et de $x$ ; elle peut l'être pour certains $x$, ceux qui font partie d'un ensemble M, et pour les E qui font partie d'une classe d'ensembles donnée C :

$$(x) : x \,\varepsilon\, a \,.\, \equiv \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{M} \,.\, (\mathrm{E}) \,.\, \mathrm{E} \,\varepsilon\, \mathrm{C} \supset \sim x \,\varepsilon\, \mathrm{E} \qquad (2)$$

Cependant, dans ce cas, il est nécessaire, pour qu'il y ait contradiction, que $a$ soit élément de C. La contradiction résulterait de la définition d'un ensemble $a$ dont les éléments ne sont contenus dans aucun élément d'une classe d'ensembles C, dont $a$ fait partie.

Au lieu d'affirmer (2) pour tous les éléments qui font partie d'une classe d'ensembles donnée C, on peut s'exprimer d'une façon plus générale, en affirmant la validité de (2) pour tous les ensembles ayant une certaine relation R avec des $y$ . De là :

$$(x) : x \,\varepsilon\, a \,.\, \equiv \,.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{M} \,.\, (\exists \mathrm{R})(\mathrm{E})(y) \,.\, \mathrm{E R} y \supset \sim x \,\varepsilon\, \mathrm{E} \qquad (3)$$

Si « $(\exists \mathrm{R})(y) \,.\, a\mathrm{R}y$ » est une proposition vraie, on aura une contradiction qui consistera dans l'affirmation de l'équivalence, pour tous les éléments de M, de leur contenance dans $a$ avec la négation de cette contenance. Il n'est cependant pas nécessaire, pour que la contradiction apparaisse, que ce soit justement la relation de contenance qui soit simultanément affirmée et niée ; la même contradiction peut se présenter dans le cas d'une relation quelconque S :

$$(\exists \mathrm{S})(x) : x\mathrm{S}a \,.\equiv .\, x \,\varepsilon\, \mathrm{M} \,.\, (\exists \mathrm{R})(\mathrm{E})(y) \,.\, \mathrm{ER}y \supset \sim x\mathrm{SE} \qquad (4)$$

Ceci nous amène à formuler deux règles :

I. Sera prohibée toute définition de $a$ ayant la forme (4), ou constituant, dans le système, une proposition équivalente à (4), ou pouvant être déduite de (4) par substitution de variable, si :

$a$) le système est pourvu d'une directive permettant de passer d'une expression ayant la forme $(x)fx$ à une autre ayant la forme $fx'$, $x'$ étant un argument possible de $fx$ ;

b) « $(\exists \mathrm{R})(y) \,.\, a\mathrm{R}y$ » est une proposition vraie dans le système.

II. Dans un système contenant également une directive permettant de passer d'une expression ayant la forme $(F)Fa$ à une autre ayant la forme $F'a$, $F'$ étant une valeur possible de $F$, sera prohibée également toute définition dont, par substitution de variable fonctionnelle, il sera possible de déduire une expression ayant une forme prohibée par la règle I.

Les règles I et II précisent dans quels cas les définitions non-prédicatives doivent être prohibées ; l'observation stricte de ces règles, qui limitent la défense des définitions non-prédicatives énoncée par Henri Poincaré, constitue une condition nécessaire et suffisante pour éviter les antinomies de la théorie des ensembles.

Dans ce qui suit, nous appliquerons notre raisonnement au théorème connu de Cantor sur l'inégalité des nombres cardinaux (1).

Cantor démontre que l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné a une puissance supérieure à celle de cet ensemble.

Pour prouver ce théorème, il s'agit de montrer que, étant donné un ensemble quelconque M et l'ensemble de ses sous-ensembles T,

1° L'ensemble M a même puissance qu'un sous-ensemble de T (c'est-à-dire qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de M et ceux d'un sous-ensemble de T) ;

1. Cf. W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*. Paris, 1928, pp. 84-85.

2° il n'y a pas de sous-ensemble de M qui ait même puissance que T.

Le 1° est démontré facilement ; en effet, tout ensemble formé d'un seul élément de M est un sous-ensemble de M et appartient à T ; il en résulte que l'ensemble de tous les sous-ensembles de M ne contenant qu'un seul élément, est un sous-ensemble de T ; or, cet ensemble a évidemment même puissance que M.

Pour démontrer le 2°, supposons qu'il existe un sous-ensemble de M,M' tel, que l'on puisse établir une correspondance biunivoque entre tous ses éléments et ceux de T ; à tout élément $m$ de M' correspondrait donc un ensemble Q($m$), élément de T, et réciproquement.

Étant donné que $m$ peut être ou ne pas être élément de l'ensemble Q($m$) qui lui correspond, appelons N l'ensemble de tous les éléments $m$ de M' qui ne sont pas contenus dans l'ensemble Q($m$) qui leur correspond. Comme N est un sous-ensemble (peut-être vide) de M, il y aurait donc, si l'hypothèse que T a même puissance que M' était vraie, un élément de M' (disons $m^0$) qui lui correspondrait, et N serait identique à Q ($m^0$).

Or, à N ne peut correspondre aucun élément $m^0$ de M'. En effet, dans ce cas, $m^0$ serait élément de N ou ne le serait pas. Si $m^0$ était élément de N, il aurait dû ne pas être contenu dans l'ensemble N qui lui correspond ; or ceci est contraire à l'hypothèse. Si $m^0$ n'était pas élément de N, il aurait dû être contenu dans N, qui contient tous les éléments de M' qui ne sont pas contenus dans l'ensemble qui leur correspond. L'hypothèse que $m^0$ correspond à N, impliquant contradiction, doit donc être rejetée. Il en résulte qu'il est impossible d'établir une correspondance biunivoque entre T et un sous-ensemble de M, et l'ensemble de tous les sous-ensembles de M est donc d'une puissance supérieure à celle de l'ensemble M. Comme M est un ensemble quelconque, le théorème est démontré. C'est en se fondant là-dessus que Cantor distingue des ensembles infinis de plus en plus puissants, et établit ainsi la série des alephs.

Examinons de plus près le raisonnement de Cantor, et arrêtons-nous à la définition de l'ensemble N : cette définition constitue, en réalité, un cas particulier de la proposition (4), où, à la place de $a$, on a l'ensemble N, à la place de S, la relation $\varepsilon$, au lieu de M,M', R est remplacé par la relation de correspondance biunivoque R', et $y$ a les mêmes arguments que $x$ :

$$(x) : x \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\equiv .\, x \,\varepsilon\, \mathrm{M}' \,.\, (\mathrm{E})\mathrm{ER}'x \supset \sim x \,\varepsilon\, \mathrm{E} \qquad (5)$$

Au cas où un élément de M′ aurait la relation R′ avec N, l'équivalence définissant N serait fausse, et l'introduction d'une telle définition de N dans le système serait prohibée par la règle I. S'il résulte de données antérieures que ce serait le cas, l'ensemble N ne pourrait pas, régulièrement, être défini dans le système. Le raisonnement de Cantor serait alors inopérant, car il se fonderait sur une contradiction, à partir de laquelle on peut tout démontrer. C'est ainsi que, en remplaçant dans la proposition (5) $x$ par E et M′ par l'ensemble de tous les ensembles U, on aurait

$$(E) : E \varepsilon N . \equiv . E \varepsilon U . ER'E \supset \sim E \varepsilon E \qquad (6)$$

Comme tout ensemble est contenu dans l'ensemble de tous les ensembles, et qu'il est toujours possible d'établir une correspondance entre un ensemble et lui-même, il en résulte que si N est son propre élément il n'est pas son propre élément, et réciproquement : nous venons de reconstruire l'antinomie de Russell. Cette antinomie ne découle pas de la notion même d'ensemble de tous les ensembles, mais de la définition de l'ensemble N qui enfreint la règle I. Pour qu'il y ait contradiction, il n'est pas nécessaire de se servir de l'ensemble U, mais d'un ensemble quelconque dont N est élément.

Il résulte de notre analyse qu'il est impossible d'appliquer le théorème de Cantor à l'ensemble de tous les ensembles, car dans ce cas on serait obligé d'introduire dans le système une définition d'un ensemble prohibée par la règle I. On devrait donc distinguer, parmi les ensembles, ceux auxquels le théorème de Cantor est applicable et les autres : la puissance de ceux-ci ne serait pas terme de la série de alephs, et à l'aide de l'opération cantorienne on ne pourrait jamais les atteindre à partir d'ensembles auxquels cette opération s'applique. De même que l'on ne peut pas atteindre, par l'addition répétée de l'unité, un nombre infini à partir d'un nombre fini quelconque, de même, en opérant dans l'infini, on devrait se décider à reconnaître l'existence d'un intervalle infranchissable entre un quelconque des alephs et la puissance de l'ensemble de tous les ensembles.

Paris-Lille. — Imp. A. TAFFIN-LEFORT.