Ch. PERELMAN
Aspirant du F. N. R. S.

L'ANTINOMIE DE M. GÖDEL

Extrait
des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences),
n° 6, 1936

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, rue de Louvain, 112

1936

Avec les hommages de l'auteur.
Perelman

L'antinomie de M. Gödel,

par CH. PERELMAN, Aspirant du F. N. R. S.

Dans un article devenu célèbre [1], M. Gödel s'est proposé de démontrer qu'à l'intérieur d'un système analytique, comme celui des *Principia Mathematica* [2], il était possible de construire des propositions indéterminables.

On entend par proposition *indéterminable* une proposition telle qu'on ne puisse démontrer ni la vérité de l'affirmation, ni la vérité de la négation de cette proposition. Pour démontrer qu'une proposition *p* est indéterminable, il faut réduire à une contradiction l'hypothèse que *p* est démontrable et celle que non-*p* est démontrable. Pour fixer la terminologie, disons qu'une expression *démontrable* est vraie; par transposition, une expression fausse est *indémontrable*.

Pour construire une proposition indéterminable à l'intérieur d'un système analytique, M. Gödel arithmétise les formules de la logique, c'est-à-dire qu'il fait correspondre à chaque signe logique un nombre naturel déterminé; de sorte que chaque formule peut être exprimée à l'aide d'une suite finie de nombres naturels, et chaque démonstration à l'aide d'une suite finie de suites finies de nombres naturels. Démontrer une proposition revient à construire une suite de suites de nombres naturels telle que la dernière suite exprime la proposition démontrée. M. Gödel montre

(1) Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Aus den *Monatsheften für Mathematik und Physik*, XXXVIIIe v., 1er cahier, Leipzig, 1931.

(2) A. WHITEHEAD et B. RUSSELL *Principia Mathematica*, 2e éd., Cambridge, 1925.

qu'il est possible de construire, à l'aide de symboles des *Principia Mathematica*, une formule $F(v)$ dont la signification serait « v est une formule démontrable ».

Ceci étant admis, la construction d'une proposition indéterminable s'avère chose relativement aisée.

Soit un signe de fonction propositionnelle; il consistera en une suite de nombres naturels contenant une variable, c'est-à-dire une place vide, où l'on pourra mettre un argument quelconque, qui sera un nombre naturel. Comme toutes les formules de ce calcul consistent en des suites finies de nombres, le nombre de formules différentes que l'on pourrait ainsi construire ne peut dépasser l'ordre du dénombrable, et il est donc possible de numéroter ces formules, c'est-à-dire de faire accompagner chacune d'elles d'un indice qui sera un nombre naturel.

Si, dans les diverses fonctions que l'on vient de numéroter, on considère comme valeur de la variable le signe numérique qui sert d'indice à chacune d'entre elles, on obtiendra des suites de nombres naturels dont les unes seront démontrables et les autres ne le seront pas. Ce fait permet de distinguer deux sortes d'indices: ceux qui accompagnent des fonctions donnant lieu à des expressions démontrables, quand on donne à la variable leur indice comme valeur, et ceux qui n'ont pas cette propriété. *Ces derniers indices peuvent être groupés en un ensemble* E. Dire que « n est élément de E » sera donc équivalent à « il est faux qu'en donnant à la variable de la fonction ${}_nFx$ la valeur n on obtienne une expression démontrable ».

Remarquons que la fonction propositionnelle « n est élément de E » possède également un indice, disons q; on peut donc la désigner par le symbole ${}_qFx$. En introduisant ce symbole dans la dernière équivalence, on a « n satisfait ${}_qFx$ » équivaut à « il est faux que n *satisfait* ${}_nFx$ soit une expression démontrable », ou encore : ${}_qFn$ équivaut à « ${}_nFn$ est une expression indémontrable ».

A partir de cette dernière équivalence, il est facile de démontrer que ${}_qFq$ est une expression indéterminable, c'est-à-dire que l'hypothèse de sa démontrabilité, aussi bien que celle de la démontrabilité de sa négation, se réduit à une contradiction.

En effet, suposons que ${}_qFq$ soit démontrable; dans ce cas, ${}_qFq$ sera une expression vraie, et il en sera de même de l'expression qui lui est équivalente : « ${}_qFq$ est une expression indémontrable ». L'hypothèse de la démontrabilité de ${}_qFq$ implique donc sa négation, et doit par conséquent être rejetée.

Supposons que non-${}_qFq$ soit démontrable; elle sera donc vraie, tout comme l'expression qui lui est équivalente « il est faux que ${}_qFq$ soit une expression indémontrable »; or celle-ci revient à affirmer la démontrabilité de ${}_qFq$. Comme l'hypothèse de la démontrabilité de non-${}_qFq$ implique également sa négation, l'expression ${}_qFq$ doit donc être considérée comme indéterminable.

Examinons de plus près le raisonnement de M. Gödel. Une étude formelle des hypothèses se trouvant à la base de celui-ci nous convaincra du fait que le résultat auquel M. Gödel aboutit est bien plus modeste qu'il ne semble au premier abord. Nous verrons, en effet, que le seul résultat de l'article examiné est la construction d'une nouvelle antinomie, à ajouter à celles, devenues classiques, de la logique et de la théorie des ensembles. L'antinomie de M. Gödel présente exactement la même structure que ces dernières, et résulte, comme celles-ci, d'une fausse équivalence posée dans les prémisses ([1]).

Tout le raisonnement de M. Gödel pivote autour d'une définition fondamentale, celle de l'ensemble E. Un indice en fait partie si l'expression, obtenue en remplaçant la variable de la fonction par l'indice de celle-ci, est indé-

([1]) V. Ch. Perelman, Les Paradoxes de la Logique, dans *Mind*, avril 1936, vol. XLV.

montrable. Ceci nous permet de poser l'équivalence définissant l'ensemble E :

$$(n) \cdot n \varepsilon \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot \sim \mathrm{D}em\, {}_n\mathrm{F}n.$$

($\sim \cdot$ $\mathrm{D}em\, {}_n\mathrm{F}n$ se lit : il est faux que ${}_n\mathrm{F}n$ soit démontrable.)

Comme l'expression $n\varepsilon\mathrm{E}$ désigne une fonction dont l'indice est q, on obtient, par simple remplacement dans l'équivalence précédente,

$$(n) \cdot {}_q\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{D}em\, {}_n\mathrm{F}n.$$

Cette équivalence étant affirmée pour toutes les valeurs de n, elle doit aussi être vraie si l'on y remplace n par une de ses valeurs, à savoir q :

$${}_q\mathrm{F}q \cdot \equiv \cdot \sim \cdot \mathrm{D}em\, {}_q\mathrm{F}q;$$

or, cette dernière formule affirme l'équivalence d'une expression avec l'affirmation de son indémontrabilité. On voit l'analogie de ce résultat avec le paradoxe du menteur, où l'on affirme, dans une expression, la fausseté de celle-ci. Cependant M. Gödel semble aboutir, non pas à un paradoxe, mais à un résultat précieux. En effet, alors que dans les paradoxes on aboutit à l'équivalence d'une proposition et de sa négation, on est arrivé ici à démontrer l'équivalence d'une proposition, non pas avec sa négation, mais avec l'affirmation de son indémontrabilité. Or, ce résultat ne semble pas, à priori, contradictoire; au lieu de le ranger parmi les paradoxes, on l'a considéré comme une découverte mathématique de très grande importance.

Dans les pages qui suivent nous allons démontrer que de l'équivalence fondamentale dont part M. Gödel il est possible de déduire des paradoxes posant l'équivalence d'une proposition et de sa négation, que le raisonnement de M. Gödel est basé sur de fausses prémisses, tout comme les autres antinomies, et qu'il ne faut donc pas s'étonner de voir M. Gödel aboutir à un résultat extraordinaire, alors qu'il est facile d'aboutir, à partir de ces mêmes prémisses, à un résultat contradictoire.

Considérons l'équivalence

$$(n) \cdot n \varepsilon \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot \sim \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{1}$$

Appliquons-y le principe de transposition :

$$(n) \cdot \sim n \varepsilon \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{2}$$

Dans ce qui suit, nous allons transformer ces premières équivalences de façon à rendre leur second membre équivalent, non pas à la vérité du premier, mais à sa démontrabilité. Nous commencerons par transformer l'équivalence (2).

Remarquons que l'ensemble E a été défini comme celui de tous les n, tels que $\sim \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n$. Son complémentaire sera l'ensemble de tous les n, tels que $Dem\ {}_n\mathrm{F}n$. Il en résulte que si, pour un n donné, ${}_n\mathrm{F}n$ est démontrable, l'expression $\sim n \varepsilon \mathrm{E}$ est non seulement vraie, mais également démontrable; il suffira, en effet, de compléter la démonstration de ${}_n\mathrm{F}n$ par la définition de l'ensemble E pour démontrer $\sim n \varepsilon \mathrm{E}$.

La manière dont l'ensemble E a été introduit nous permet donc de poser

$$(n) . Dem\ {}_n\mathrm{F}n \supset Dem \sim n \varepsilon \mathrm{E}. \tag{3}$$

D'autre part, comme toute expression démontrable est vraie, on a

$$(n) . Dem \sim n \varepsilon \mathrm{E} \supset \sim n \varepsilon \mathrm{E}. \tag{4}$$

A partir de l'équivalence (2), on peut tirer

$$(n) \cdot \sim n \varepsilon \mathrm{E} \supset Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{5}$$

Comme de (4) et (5) on peut tirer, par syllogisme,

$$(n) . Dem \sim n \varepsilon \mathrm{E} \supset Dem\ {}_n\mathrm{F}n, \tag{6}$$

on peut déduire de (3) et de (6)

$$(n) \cdot Dem \sim n \varepsilon \mathrm{E} \cdot \equiv \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{7}$$

Comme $n \varepsilon \mathrm{E}$ peut s'écrire ${}_q\mathrm{F}n$, la proposition (7) équivaut à

$$(n) \cdot Dem \sim {}_q\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{8}$$

En appliquant à la proposition (1) le même raisonnement que celui qui nous a permis d'aboutir à la proposition (8), à partir de l'équivalence (2), on obtient l'équivalence

$$(n) \cdot Dem\ {}_q\mathrm{F}n \cdot \equiv \cdot \sim \cdot Dem\ {}_n\mathrm{F}n. \tag{9}$$

Pour l'argument q, les équivalences (8) et (9) deviennent

$$Dem \sim {}_q\mathrm{F}q \cdot \equiv \cdot Dem\ {}_q\mathrm{F}q \tag{10}$$

et

$$Dem\ {}_q\mathrm{F}q \cdot \equiv \cdot \sim \cdot Dem\ {}_q\mathrm{F}q. \tag{11}$$

En considérant les propositions (10) et (11), que l'on a facilement pu déduire de la définition de l'ensemble E, posée par M. Gödel, on ne s'étonnera pas du résultat obtenu par lui, qui n'exploite que dans une faible mesure les possibilités qu'elle offrait. Elle permet, en effet, de démontrer, outre l'existence d'une proposition indéterminable, celle d'une proposition dont on peut démontrer, à la fois, la vérité et la fausseté, et celle d'une proposition dont la démontrabilité équivaut à l'indémontrabilité. Nous voici en plein dans les paradoxes. Cette moisson de résultats, cependant, est plus riche que celle obtenue dans les paradoxes classiques où l'on se contente de démontrer que la vérité d'une proposition équivaut à sa fausseté; en effet, la notion de démontrabilité permet d'obtenir quatre possibilités pour une proposition donnée: celle-ci peut être démontrable ou indémontrable, et il en est de même de sa négation.

Comment a-t-on pu démontrer les propositions (10) et (11), dont le caractère contradictoire est pourtant manifeste? On les a déduites des propositions (8) et (9), qui constituent de fausses équivalences. La première affirme l'équivalence de la démontrabilité d'une fonction à celle de sa négation, et ceci pour toutes les valeurs de la variable; dans la deuxième proposition, on affirme l'équivalence formelle de la démontrabilité d'une fonction à celle de son indémontrabilité. Le fait que dans le premier membre de ces équivalences se trouve, au lieu de la variable, un des arguments de la fonction permet de limiter la contradiction; mais celle-ci éclate quand on introduit le même argument dans le deuxième membre de l'équivalence.

Comme ces fausses équivalences se déduisent, avec la plus grande facilité, de la définition de l'ensemble E, c'est celle-ci qui doit être mise en cause; à la regarder de près, en effet, on se rend compte qu'elle consiste dans une fausse équivalence, que le principe de contradiction nous oblige à rejeter.

En disant, dans son article, que sa démonstration était apparentée aux paradoxes, M. Gödel disait trop peu. C'est, en fait, une nouvelle antinomie, ayant identiquement la même structure que les paradoxes connus, qu'il venait de construire. Et, de même que les paradoxes classiques, celui que M. Gödel a construit dans son célèbre article résulte d'une contradiction posée dans les prémisses.