LES PARADOXES DE LA LOGIQUE

[*Off-printed from* MIND: *a Quarterly Review of Psychology and Philosophy. Vol. XLV., N.S., No.* 178.]

BY CH. PERELMAN

LES PARADOXES DE LA LOGIQUE.[1]

1. A la fin du siècle dernier, la logique et la théorie des ensembles furent troublées par l'apparition d'étranges antinomies,[2] qui semblaient nécessiter la modification des bases mêmes de la logique. Cette entreprise, à laquelle s'intéressèrent bon nombre de savants, eut pour conséquence la constitution de la théorie des types de Lord Russell et le succès de la conception intuitionniste des mathématiques de M. Brouwer.

Considérons de plus près ces hypothèses paradoxales qui conduisent aux antinomies. On se trouve en présence d'une hypothèse paradoxale quand on parvient à en déduire une proposition p telle, qu'en la posant, on se voit dans l'obligation d'affirmer *non-p* et, d'autre part, si on suppose la vérité de *non-p*, on est amené à affirmer p. C'est ce continuel balancement entre p et *non-p*, excluant toutes les possibilités d'éviter la contradiction, qui a amené les logiciens qui se sont occupés de la question à douter de la validité de certaines règles de la logique classique.

Remarquons que ce jeu de bascule est nécessaire pour qu'il y ait paradoxe. En effet, supposons que l'affirmation de p nous amène à *non-p*, mais que l'on ne puisse déduire p de *non-p :* on n'aura pas de paradoxe. Car, si l'implication *réciproque* de p et de *non-p* pose l'équivalence de deux propositions contradictoires, c.-à-d. une véritable antinomie, le fait que p implique *non-p*, sans que le contraire soit vrai, s'explique aisément par l'hypothèse que p est faux. C'est pourquoi seules les hypothèses où l'on aboutit à l'équivalence d'une proposition et de sa négation seront étudiées par nous de plus près.

2. Nous allons nous attacher, dans ce qui suit, à l'analyse des paradoxes du menteur, du barbier, de la classe des classes qui ne sont

[1] Cet article a été suscité par les recherches du séminaire de logique mathématique de l'Université de Bruxelles, et les encouragements de son directeur, M. le professeur Barzin, sont pour beaucoup dans sa réalisation. Je prie mon maître d'agréer ici tous mes remerciements.

[2] Pour un exposé des principales antinomies, voir notamment : B. Russell et A. Whitehead, *Principia Mathematica*, I, Cambridge, 1910 ; A. Fraenkel, *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Leipzig, 1927.

R. Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 41e v., 2e cahier, pp. 263-284, Leipzig, 1934.

pas membre d'elle-même (auquel peuvent se ramener les antinomies du prédicat non-attribuable à lui-même et du concept " heterologisch "), et de celui des relations.

(*a*) Celui qui dit " je mens maintenant ", affirme qu'il ment par cette proposition. S'il ment, il ne ment pas ; s'il ne ment pas, il ment. D'ailleurs dire que l'on ment en affirmant cette proposition, c'est dire " cette proposition est fausse ". Si elle est fausse, alors elle est vraie ; si elle est vraie, elle est fausse. Ces deux antinomies sont identiques logiquement, et ne différent que par leur expression.

(*b*) L'antinomie du barbier part de l'hypothèse que les hommes rasés par l'unique barbier du village sont tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Le barbier, lui, se rase-t-il lui-même, ou non ? S'il se rase lui-même, il ne se rase pas lui-même, car il ne rase que ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. S'il ne se rase pas lui-même, il se rase lui-même, le barbier rasant tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.

(*c*) On peut distinguer deux sortes de classes, celles qui satisfont la fonction dont elles sont l'extension, et celles qui ne la satisfont pas ; en d'autres termes, les classes qui sont membre d'elle-même, et celles qui ne le sont pas. La classe des classes qui ne sont pas membre d'elle-même doit, elle aussi, ou bien être membre d'elle-même, ou ne pas être membre d'elle-même. Supposons qu'elle soit membre d'elle-même ; elle fait alors partie de la classe des classes qui ne sont pas membre d'elle-même, et n'est donc pas membre d'elle-même. D'autre part, si elle n'est pas membre d'elle-même, elle fait partie de l'autre classe, de la classe des classes qui sont membre d'elle-même, et elle est donc membre d'elle-même.

(*d*) Chaque fois que la relation quelconque R n'a pas la relation R avec S elle a la relation T avec S et vice-versa. Remplaçons R par T. Il en résulte que, chaque fois que T n'a pas la relation T avec S. elle a la relation T avec S, et vice-versa.

3. Voici le problème posé par ces antinomies : on suppose que les hypothèses dont on part sont parfaitement valables pour la logique classique, et que, malgré leur légitimité, on parvient à en déduire des conséquences contradictoires. On en conclut qu'il faut restreindre les règles de la logique classique qui tolèrent ces hypothèses nous entraînant dans d'inextricables antinomies ; on les modifie ; on impose des conditions supplémentaires à la construction de propositions valables. On cherche à remédier aux antinomies par telle ou telle modification des règles de la logique classique, ce qui, malheureusement, entraîne d'ordinaire l'obligation de sacrifier d'autres propositions logiques ou mathématiques, précieuses celles-là, et qui deviennent d'innocentes victimes de l'œuvre de purification entreprise sans pitié. Si l'on veut sauver ces propositions, dont personne n'avait auparavant contesté ni la légitimité ni la fécondité, on en est réduit à des expédients plus ou moins ingénieux et rarement convaincants.

L'incertitude ainsi introduite dans la logique et les mathématiques, il nous semble pouvoir la lever en montrant que ce ne sont pas les règles de la logique classique, qu'il faut rendre responsables des paradoxes, mais bien les transgressions de ces règles, commises en posant les hypothèses qui mènent aux antinomies.

4. Si l'on posait comme prémisse d'un raisonnement, l'affirmation p équivaut à *non-p* ($p \equiv \sim p$), on en aurait évidemment pu déduire toute sorte de conséquences contradictoires, et en particulier, en posant p, on aurait pu en déduire *non-p*, et de *non-p* on aurait facilement déduit p. Personne cependant n'aurait accusé les règles de la logique d'être responsables de ces contradictions, que l'on aurait trouvé, non pas paradoxales, mais toutes naturelles. Il en aurait été de même si l'on avait affirmé que p équivaut à *non-p*, non pas en une fois, mais à l'aide de deux affirmations simultanées, comme " p équivaut à q " et " q équivaut à *non-p* ". Nous allons voir que tous les paradoxes exposés au paragraphe 2, se ramènent, au fond, à l'affirmation que p équivaut à *non-p*, introduite d'une façon plus ou moins indirecte, propre à surprendre l'esprit.

Tâchons de mettre en forme l'antinomie " cette proposition est fausse ". Affirmer que " la proposition p est fausse " (1) revient à affirmer *non-p*. Donnons à la proposition (1) le nom de q ; de là, *non-p* équivaut à q. Dire " cette proposition est fausse ", c'est remplacer dans la proposition (1) p par q, c'est donc affirmer que *non-q* équivaut à q. On voit ainsi que la première antinomie se réduit à poser une contradiction ; et il ne faut pas s'étonner si les conséquences qu'on en tire sont également contradictoires.

On pourrait m'objecter que l'affirmation " cette proposition est fausse " ne constitue pas la prémisse de l'antinomie, mais que c'en est déjà la conclusion contradictoire, déduite cependant de prémisses parfaitement valables. Demandons-nous quelles sont ces prémisses. La seule prémisse que l'on pourrait indiquer, c'est l'équivalence entre *non-p* et q, où l'on remplacerait p par q. Or pour que cette opération de remplacement soit possible, il faut que l'on ait affirmé l'équivalence de *non-p* et de q quelle que soit la valeur de p, ou $(p) . \sim p \equiv q$. Or cette proposition est fausse. En effet, pour qu'une équivalence formelle soit vraie, il faut qu'elle soit vérifiée par toutes les valeurs de la variable, ce qui n'est pas le cas ici ; car il y a une valeur, au moins, pour laquelle l'équivalence est fausse, et c'est la valeur q. D'ailleurs cette mise en équivalence d'une fonction avec une constante éveillera immédiatement la défiance de tous. Si la proposition $\sim q \equiv q$ est fausse, c'est qu'elle a été déduite d'une prémisse également fausse, qui la contenait en germe, la proposition $(p) . \sim p \equiv q$.

Nous constatons ici l'usage d'un procédé très ingénieux pour cacher la contradiction : c'est celui de la généralisation, dans l'équivalence entre q et *non-q*, de ce dernier terme. On parvient ainsi à cacher, au milieu de l'infinité des valeurs possibles de p dans $\sim p \equiv q$, le cas obtenu par le remplacement de p par q, où la contradiction éclate à l'étonnement général.

Il est facile de montrer que l'expression $(x) . \sim aRx \equiv aRb$ est aussi fausse que $(p) . \sim p \equiv q$, et exactement pour la même raison. La fausseté de cette équivalence est d'ailleurs tellement apparente qu'aucun logicien n'aurait trouvé la moindre difficulté à la dénoncer.

Les plus ingénieux des paradoxes cachent mieux leur défaut. Et tout d'abord, pour ne pas éveiller le soupçon que l'on éprouve devant une équivalence dont un membre contient une variable de plus, c'est la même variable que, dans les paradoxes en question, on mettra aux différentes places de variable. C'est ainsi que, en généralisant $(x) . \sim aRx \equiv aRb$, on n'aboutira pas à l'expression $(y) . (x) . \sim yRx \equiv yRb$, mais à l'équivalence $(x) . \sim xRx \equiv xRb$. Cette dernière équivalence formelle, quoiqu'elle semble plus correcte, est aussi fausse que les précédentes, car elle n'est pas vérifiée dans le cas où l'on considère b comme l'argument de la fonction ; mais comme, en général, dans les paradoxes, l'équivalence n'est pas mise en forme, et qu'elle est vraie dans tous les cas sauf un, on ne pense pas à ce cas où l'équivalence se trouve en défaut, et on s'étonne d'en déduire l'antinomie $\sim bRb \equiv bRb$. L'expression $(x) . \sim xRx \equiv xRb$ constitue la forme commune aux paradoxes du barbier et de la classe des classes qui ne sont pas membre d'elle-même. Pour obtenir le paradoxe du barbier, on n'a qu'à remplacer R par " être rasé par ", b par " le barbier du village ", et considérer que seuls les hommes du village sont des valeurs possibles de x. Pour obtenir le deuxième paradoxe, il suffit de remplacer R par la relation ϵ (être membre de), b par la classe des classes qui ne sont pas membre d'elle-même, et restreindre le champ de variation x aux classes.

Le dernier paradoxe ne diffère des précédents que par le fait que l'on y considère comme variable la relation elle-même. On voit immédiatement que l'équivalence $\sim aRS \equiv aTS$ est fausse dans le cas où l'on remplacerait R par T, et qu'on n'a donc pas le droit d'affirmer l'équivalence formelle $(R) . \sim aRS \equiv aTS$. Pour masquer la fausseté de cette expression, et pour ne pas rendre équivalente une constante à une fonction propositionnelle, on remplacera a par R, d'où $(R) . \sim RRS \equiv RTS$, équivalence aussi fausse que la précédente.

Remarquons ici, que si la construction du paradoxe ne nécessite pas de relation réflexive, elle exige cependant, pour que l'hypothèse ait une apparence de validité, que l'un des membres de l'équivalence, par laquelle l'antinomie est posée, contienne la même variable à deux places différentes.

5. L'analyse que nous venons de faire nous permet de conclure que, pour éviter les paradoxes de la logique, il n'est pas nécessaire de modifier les règles fondamentales de celle-ci ; il suffit de bien les observer.[1]

Les antinomies proviennent, en effet, de l'affirmation illégitime (et que l'on pourrait facilement déceler en la mettant en forme) d'une équivalence formelle. Car il est toujours illégitime de rendre équi-

[1] Dans un article subséquent, nous préciserons la légère modification de la définition de la classe, que l'idée développée ci-dessus rend pourtant nécessaire.

valente, pour toutes ses valeurs, une fonction à sa négation, même si l'on modifie un membre de l'équivalence en y mettant un argument de la fonction à la place d'une variable. La contradiction éclate alors quand on rend de nouveau les deux membres symétriques, en mettant le même argument à la place de la variable dans l'autre membre de l'équivalence.

Si, comme je crois l'avoir montré, les hypothèses analysées, conduisant aux antinomies, violent les règles de la logique, il n'est pas nécessaire d'amender celle-ci à l'aide de la théorie des types, pour éviter les contradictions. Je pense, au surplus, que bon nombre de mathématiciens, en se rendant compte de la facilité avec laquelle on peut éviter les antinomies de la théorie des ensembles, ne trouveront plus aussi nécessaire une refonte des principes mathématiques, dans le genre de celle entreprise par M. Brouwer et son école.

CH. PERELMAN.

ABERDEEN : THE UNIVERSITY PRESS