Elements de transfert de chaleur et de matière

CHIM-H-311 (1-1-0)

Frédéric Debaste et Sophie Liégeois
Université Libre de Bruxelles
Ecole Interfacultaire de Bioingénieur

Année académique 2013-2014

Première partie I

Introduction

Plan de la partie

1. Cadre et informations pratiques

Comment fonctionne un barbecue ?

Image sous licence CC-BY-SA-3.0
(auteur : Hedwig Storch)

$$C + O_2 \rightarrow CO_2 \qquad (1)$$

- Combustion (complète) de charbon de bois (essentiellement du carbone)
- En présence (d'un excès) d'oxygène
- A haute température (idéalement plus de $800°C$)
- D'après la cinétique : la réaction dure $10^{-3}s$
- Pourquoi n'est-ce (heureusement) pas le cas ?

Plan du chapitre

1. Cadre et informations pratiques
   - Objectifs pédagogiques
   - Aspects pratiques
   - Evaluation

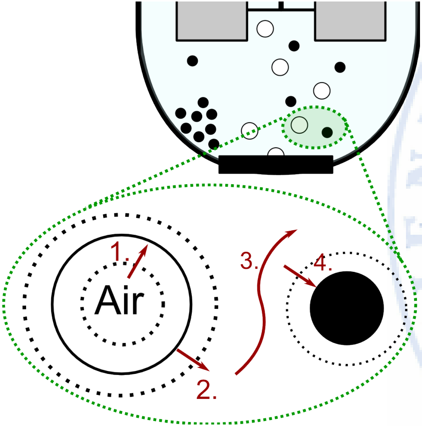
Par rapport aux cours antérieurs

- Physique, thermodynamique, chimie :
  - Calculs d'équilibres (thermique, thermodynamique)
  - Calculs de cinétique chimique
- Pas ou peu d'aspects sur les apports d'énergie et de matières :
  - Comment un réactif est-il amené au lieu de réaction ?
  - Comment la chaleur se transmet-elle ?
- Pas d'information sur les vitesses de ces transferts

Phénomènes de transports

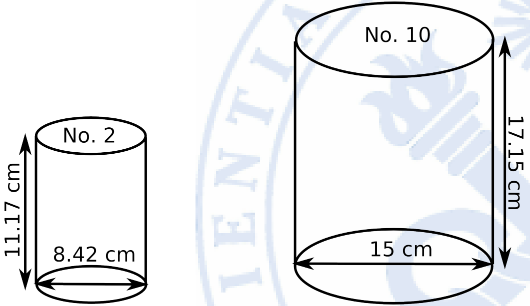
- Etude du transport d'un point à un autre de l'énergie, de la matière, ...
- Identification et analyse des mécanismes
- Quantification et mise en équation
- Mise en application
  - Perte énergétiques d'un batiment
  - Cinétique de régulation de la température d'un système (corps humain, planète, ...)
  - Dimensionnement d'échangeurs de chaleurs
  - Dimensionnement de réacteurs...

Cours ultérieurs : génie des réacteurs multiphasiques



- L'oxygène doit être amené jusqu'aux cellules
- Plusieurs transports de matière en série
- Peuvent devenir limitant
- $\Rightarrow$ avoir les bulles ne garanti pas une vitesse de croissance/réaction optimale
- A quel point le transfert de matière est-il limitant ?
- Comment minimiser cet effet ?

Cours ultérieurs : technologies des industries alimentaires



F_0 (min)	Produit	F_0 (min)
3,5	Haricots verts	6
9	Maïs, sur épis	15
5-6	Maïs en saumure	2,3
7	Petits pois en saumure	11

Questions génériques

- Quel mode de transport est dominant ?
- Quels paramètres faut-il prendre en compte ?
- Comment peut-on modéliser la géométrie du système ?
- Le système est-il stationnaire ?
- Combien de temps est nécessaire à réaliser le transfert ?
- Quelles dimensions doit avoir l'installation pour effectuer ce transfert ?

Plan du chapitre

1. Cadre et informations pratiques
   - Objectifs pédagogiques
   - Aspects pratiques
   - Evaluation

Objectifs et outils

A l'issue du cours vous devriez pouvoir

- Comprendre et identifier les différents modes de transports
- Mettre en équations (bilans) ces phénomènes de transport
- Résoudre ces bilans
- En déduire une interprétation physique

Outils

- Physique générale
- Mathématiques générales
- Résolution d'équations différentielles

Dans le référentiel de compétences

Le cours vise avant tout à développer votre

Capacité à utiliser les connaissances scientifiques fondamentales pour la résolution de problèmes

Par ailleurs, il devrait contribuer au développement des compétences liées à

- Apprendre à apprendre
- Faire preuve d'esprit critique
- Disposer des connaissances scientifiques fondamentales

Articulation des cours

Prérequis

- PHYS-H100 Physique générale
- CHIM-F-101 Chimie générale
- MATH-F-108 Mathématiques
- CNST-H-202 Introduction à la résistance des matériaux et à la mécanique des fluides
- MATH-F-214 Compléments de mathématiques

Base pour

- CHIM-H-314 Introduction au génie des procédés
- CHIM-H-413 Génie des réacteurs multiphasiques
- BING-F-402 Génie des bioréacteurs
- CHIM-H-403 Opérations unitaires (4-5ème)
- BING-H-403 Technologies des industries alimentaires
- CHIM-H-511 Conception de procédés (IRMA2)

Plan du chapitre

1. Cadre et informations pratiques
   - Objectifs pédagogiques
   - Aspects pratiques
   - Evaluation

Contacts

Frédéric Debaste

- fdebaste@ulb.ac.be (à privilégier)
- tel : +32-2-650.67.56
- fax : +32-2-650.29.10
- UB5.159
- http://www.tips-ulb.be

Sophie Liégeois

- sliegeois@ceria.be

Programme du cours

16/09/2011	Cours	Introduction
23/09/2011	Cours	Conduction stationnaire
30/09/2011	Cours	Convection stationnaire
07/10/2011	Cours	Transfert de chaleur instationnaire
14/10/2011	Cours	Echangeurs de chaleur
21/10/2011	Cours	Transfert de matière
28/10/2011	Récupération	
04/11/2011	Exercices	Conduction stationnaire
11/11/2011	Congé	
18/11/2011	Exercices	Conduction stationnaire et instationnaire
25/11/2011	Exercices	Conduction instationnaire
02/12/2011	Exercices	Convection
09/12/2011	Exercices	Echangeurs de chaleur
16/12/2011	Exercices	Transfert de matière

Exercices

- Mise en pratique de la matière théorique
- Au cœur du cours :
  - L'intérêt de cette matière est dans sa mise en pratique
  - La maitrise des concepts nécessite leur utilisation
  - Les compétences visées sont PRATIQUES
- 3 éléments clés à retirer des exercices :
  - Une compréhension de la matière
  - Une méthodologie de résolution des problèmes
  - De l'entraînement à l'usage des outils mathématiques

Notes de cours et références

Slides sur le site du service TIPs

- `http://www.tips-ulb.be`
- Slides mis à jour par rapport à l'an passé
- Certains exemples (et ordre) ont changé, mais les principes restent les mêmes
    - Restez critiques
    - N'hésitez pas à demander si vous croyez qu'il y a une faute

Références

- A. Bejan *Convective heat transfer*, 1984
- R. Bird, W. Steward, E. Lightfoot *Transport phenomena*, 2006

Le plan de cours est disponible en ligne sur le site de l'ULB

Plan du chapitre

1. Cadre et informations pratiques
   - Objectifs pédagogiques
   - Aspects pratiques
   - Evaluation

Examen

- Examen écrit
- Essentiellement des exercices
- Similaires mais différents des exercices vu
- Savoir faire des développements similaires à ceux du cours (y compris les bilans)
- Peu de théorie - encore moins de par cœur
- Formulaire de tables et formules disponibles à l'examen :
  - Le même qu'aux exercices
  - Le même qu'en ligne, présent avec les slides
- En seconde sess : c'est exactement le même principe

Examen typique

- Durée 3h
- Vous pouvez avoir une calculette non programmable
- Généralement 4 questions, une par thème parmi :
  1. L'écriture et la résolution de bilans de chaleur
  2. Un calcul de transfert de chaleur instationnaire
  3. Un calcul de transfert de chaleur convectif (utilisation de corrélations)
  4. Un calcul d'échangeur
  5. Une question sur le transfert de matière

Quelques conseils pour l'examen

- Détaillez vos raisonnement
- Notez toutes vos hypothèses
- Travailler en symbolique aussi longtemps que possible et ne remplacer par des valeurs numérique que le plus tard possible
- N'oubliez pas que toute valeur numérique s'accompagne d'unités

Deuxième partie II

Transfert de chaleur

Plan de la partie

2. Modes de transport de la chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
6. Echangeurs de chaleur

Plan du chapitre

Pourquoi ma canette ne reste-t-elle pas fraiche ?

Image sous licence CC-BY-2.0 (auteur : Sandstein)

- A l'équilibre, un corps (la canette) est à la même température que son environnement (l'intérieur du frigo)
- Si l'on sort la canette du frigo, elle sera dans un environnement plus
- Il y aura transfert de chaleur : comment ?
- Plus tard, nous répondrons à la question : combien de temps avant qu'elle ne soit trop chaude ?

Objectif du chapitre

- Expliquer ce qu'est le transfert de chaleur
- Définir les grandeurs clés du transfert de chaleur
- Définir et décrire qualitativement les modes de transport de chaleur
- Faire un lien entre l'intuition et ces grandeurs clés

Dans les chapitres suivant

- Explication de chaque mode de transport
- Analyse quantitative (mise en équation)
- Application à des exemples communs

Plan du chapitre

2. Modes de transport de la chaleur
   - Grandeurs clés
   - Sensation de chaleur
   - Modes de transfert de chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
6. Echangeurs de chaleur

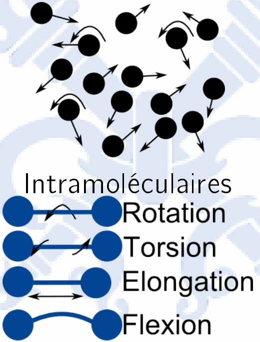
La chaleur

Définition

Quantité (grandeur extensive) d'énergie nécessaire à générer l'agitation moléculaire (y compris intra-moléculaire) d'un système

Notée dans ce cours : Q_c en $J = N.m = kg.m^2.s^{-2}$

Dans un gaz de particules simples



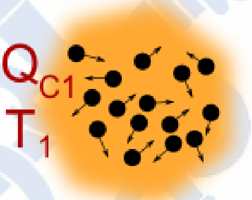
Grandeurs relatives à la chaleur

Chaleur Quantité (grandeur extensive) d'énergie nécessaire à générer l'agitation moléculaire d'un système (Q_c en $J = N.m = kg.m^2.s^{-2}$)

Température Grandeur intensive caractéristique de l'agitation moléculaire (T en K)

Capacité calorifique lien entre chaleur et température pour un corps à l'équilibre (C_p en $J.kg^{-1}.K^{-1}$)

$$Q_c = V\rho C_p\left(T - T_{ref}\right) \qquad (2)$$



T_{ref} (en K) est la température de référence d'énergie nulle pour un corps dans un état donné
V (en m^3) est le volume du corps considéré

ρ (en $kg.m^{-3}$) est la masse volumique du corps considéré

Grandeurs relatives au transfert de chaleur

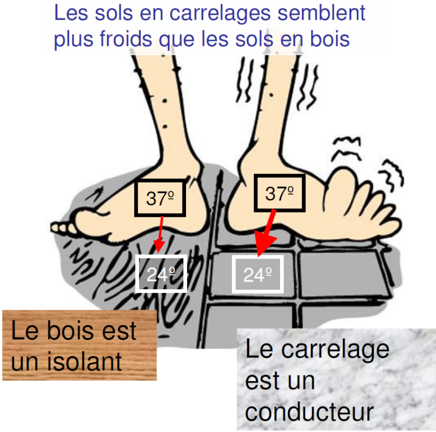
Flux de chaleur ou débit de chaleur Quantité de chaleur transférée par unité de de temps ($J.s^{-1} = W$) d'un corps chaud vers un corps froid.

Densité de flux de chaleur Quantité de chaleur transférée **par unité de surface** et de temps (q en $J.m^{-2}.s^{-1} = W.m^{-2}$) d'un corps chaud vers un corps froid.

Plan du chapitre

La sensation de chaleur

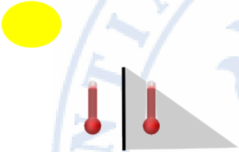
- Perception thermique monotone en le flux de chaleur
- Sensation trompeuse (croisée à d'autres phénomènes (réaction chimique, douleur, ...))
- Sensations qui dépend de l'environnement à une même température...
- Premier exemple : contact avec des matériaux qui conduisent différemment la chaleur (conduction)
- Le flux est différent



Trois autres exemples où la sensation est différente

En plein vent ou à l'abri du vent

Exposé au soleil ou à l'ombre



Dans un milieu humide ou sec

Pourquoi ces différences ?

Plan du chapitre

2. Modes de transport de la chaleur
   - Grandeurs clés
   - Sensation de chaleur
   - Modes de transfert de chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
6. Echangeurs de chaleur

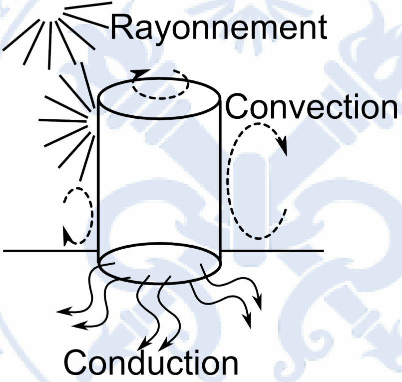
Pourquoi ma canette ne reste-t-elle pas fraiche ?

Image sous licence CC-BY-2.0 (auteur : Sandstein)

- A l'équilibre, un corps (la canette) est à la même température que son environnement (l'intérieur du frigo)
- Si l'on sort la canette du frigo, elle sera dans un environnement plus
- Il y aura transfert de chaleur : comment ?
- Plus tard, nous répondrons à la question : combien de temps avant qu'elle ne soit trop chaude ?

Modes de transfert de chaleur

- Trois modes de transports principaux :
  - Conduction
  - Convection
  - Rayonnement
- D'autres modes de transports existent
  - Liés à des forces motrices différentes
  - Spécifiques à certaines applications
  - Pas étudiés dans ce cours

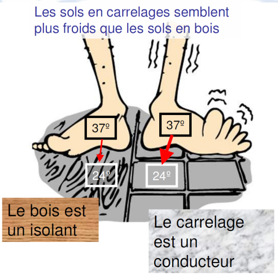


Conduction : principe

- Transfert de chaleur entre corps en contacts direct (et au sein d'un corps)
- Indépendant de tout mouvement des corps
- Mode de transport universel
- Mode de transport le plus lent
- Dominant (seul) dans les solides
- Caractéristique de chaque matériaux (bon ou mauvais conducteur de chaleur)

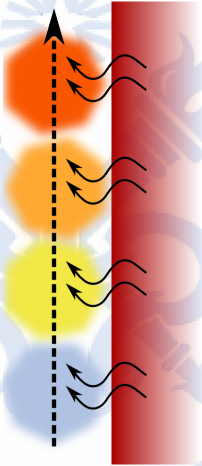
Conduction : exemples d'application

- Sensation de chaleur en contact avec différents solides
- Air et eau mauvais conducteurs :
  - Isolation à l'air (double vitrage, fibre de verre,...)
  - Maintient de la température dans un four ouvert (four à pizza)
  - Expérience de l'éprouvette



Convection : principe

- Transfert de chaleur lié au déplacement des corps
- Un corps qui se déplace emporte l'énergie qu'il contient
- En cours de déplacement : échange de chaleur avec les corps rencontrés (conduction)
- Convection = conduction + advection
- Par définition plus important que le transport par conduction
- Dominant dans les liquides et les gaz
- Dépend fortement de l'écoulement
- Classé suivant la cause du mouvement



Convection naturelle et forcée

Convection forcée

- Source de l'écoulement indépendant de l'existence d'un transfert de chaleur
  - Pompe, ventilateur
  - Ecoulement par différence de hauteur,...
- L'écoulement existe indépendamment du transfert de chaleur

Convection naturelle

- Source de l'écoulement lié au transfert de chaleur
  - Masse volumique dépendant de la température
  - Ou variation d'une autre propriété (tension de surface, ...)
- L'écoulement s'arrête si le transfert de chaleur est arrêté

Convection : exemples

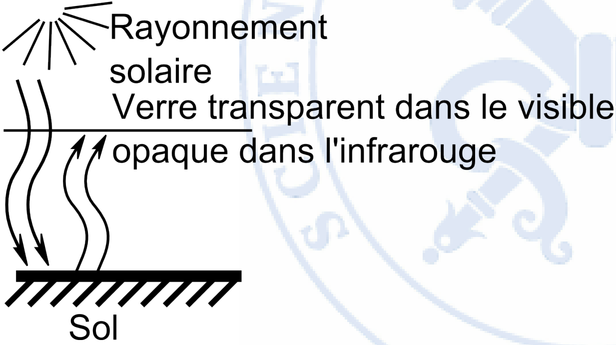
- Bon transfert de chaleur dans l'air (convection naturelle)
- Four en chaleur tournante (convection forcée)
- Chauffage domestique (convection naturelle)
- Ventilateurs (convection forcée)
- Mélange des liquides de cuisson

Rayonnement : principes

- Transfert de chaleur entre surfaces distantes
- Transport au travers du rayonnement électromagnétique de chaque corps
- Très différent des deux autres modes de transport
- Se propage même dans le vide
- Surtout important pour de grandes différences de températures
- A prendre en compte pour des analyses précises

Rayonnement : application à l'effet de serre

- Le verre laisse passer certains rayonnement solaires
- Qui sont absorbés par le sol
- Puis réémis par le sol à d'autres longueurs d'ondes
- Ces longueurs d'ondes sont bloquées par le verre



Résumé

Conduction

- Transport entre corps en contact direct
- Indépendant de tout mouvement

Convection

- Transport lié au mouvement des corps
- Peut-être naturel ou forcé selon la cause du mouvement
- Plus fort que la conduction

Rayonnement

- Transport entre corps distants
- Provoqué par le rayonnement électromagnétique

Commet garder ma boisson fraîche : la bouteille thermos

But conserver la chaleur

Moyen en limitant tous les transports

Conductif et convectif en créant des zones de vides entre des parois successives proches

Rayonnement en façonnant des parois réfléchissante

Plan du chapitre

Isolation d'une habitation passive

- Habitation passive : qui ne nécessite pas de système de chauffage conventionnel
- Apports naturels de chaleur (soleil, activité intérieure)
- Nécessite de réduire les pertes de chaleur vers l'extérieur ⇒ isolation renforcée.
- Quelles épaisseurs de quels matériaux sont nécessaires ?
- Pour être considérée comme passive, une habitation doit entre autre avoir des murs caractérisés par une résistance thermique minimale de $2.5 m^2.K.W^{-1}$.

Conduction : principe

- Transfert de chaleur entre corps en contacts direct (et au sein d'un corps)
- Indépendant de tout mouvement des corps
- Mode de transport universel
- Mode de transport le plus lent
- Dominant (seul) dans les solides
- Caractéristique de chaque matériaux (bon ou mauvais conducteur de chaleur)

Objectif du chapitre

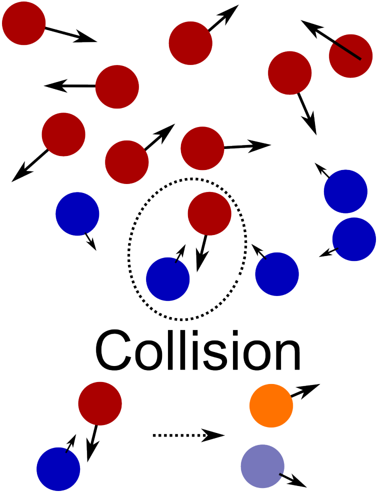
- Expliquer en détail le transfert de chaleur par conduction
- Définir les grandeurs qui caractérisent cette conduction
- Décrire la loi fondamentale du transport de chaleur par conduction
- Définir la méthodologie de bilan de chaleur et de résolution de problèmes

Le tout sera suivi

- De mises en applications
- D'une réponse à la question de l'isolation du bâtiment

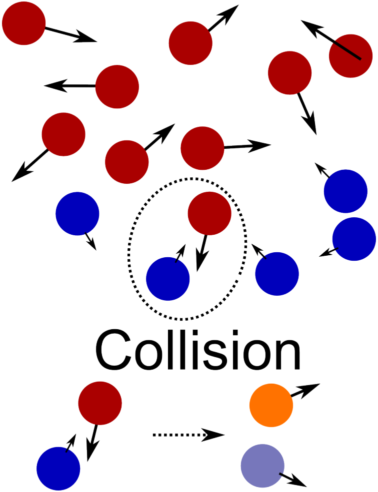
Plan du chapitre

Approche microscopique



- Température = indicateur de l'agitation des molécules
- Les corps plus chaud sont composé de molécules qui bougent plus
- Lors de la mise en contact d'un corps *chaud* avec un corps *froid* :
  - Collisions (élastiques) entre molécules du corps chaud et du corps froid
  - La molécule la plus énergétique (du corps chaud) cède alors de l'énergie à la moins énergétique (du corps froid)
  - Le corps chaud a perdu de l'énergie : il est moins chaud
  - Le corps froid a reçu de l'énergie : il est plus chaud
  - Il y a donc eu transfert de chaleur...

Approche microscopique : déductions



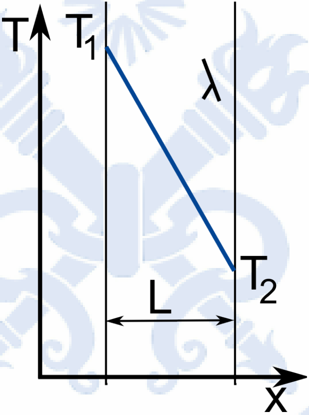
- La chaleur se transmet du chaud vers le froid
- Par contact directe entre les molécules
- Transfert d'autant plus rapide que la différence de température est grande
- S'arrête si la différence de température est nulle
- La quantité d'énergie transférée par unité de temps dépend des molécules en présence et de leur mouvement. $\Rightarrow$ fonction de :
  - la température
  - la composition du système
  - la masse volumique du système

Approche phénoménologique

- Observons un mur plan infini d'épaisseur L
- Le côté gauche est maintenu à une température T_1
- L'autre est maintenu à une température $T_2 < T_1$
- Après *un certain temps* : plus de changement dans le temps, *état stationnaire*
- Profil linéaire de température dans le mur
- Densité de flux de chaleur de gauche à droite :

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \tag{3}$$

- λ est la conductibilité thermique (en $W.m^{-1}.K^{-1}$)



Généralisation : première loi de Fourier

- Si on fait tendre l'épaisseur du mur vers 0

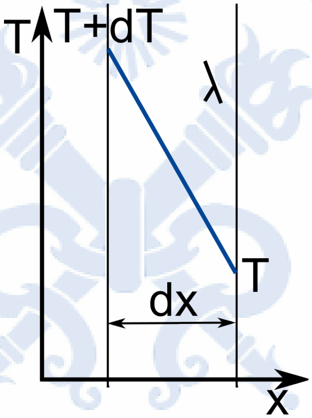
$$T_1 - T_2 \rightarrow dT \tag{4}$$

$$L \rightarrow dx \tag{5}$$

- Première loi de Fourier

$$\boxed{q_x = -\lambda \frac{dT}{dx}} \tag{6}$$

- Signe moins pour exprime la convention du transfert de chaleur du chaud vers le froid
- Loi du premier ordre



Lois du premier ordre

$$\boxed{\underbrace{q_x}_{\text{densité de flux}} = -\lambda \underbrace{\frac{dT}{dx}}_{\text{force motrice}}} \tag{7}$$

- Equation de la même forme que de nombreux flux thermodynamiques
- Une force motrice (gradient d'une grandeur intensive) cause un flux :

  Loi de Fourier flux de chaleur lié à un gradient de température

  Loi de Fick flux de matière lié à un gradient de concentration

  Loi de Newton flux de quantité de mouvement lié à un gradient de *pression*

  Loi d'Ohm flux de charge électrique (intensité) lié à une différence de potentiel

- Liés au travers d'un coefficient phénoménologique

Conductibilité thermique et diffusivité thermique

- *Conductibilité thermique* λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$
- Dépend essentiellement des propriétés du matériau
- Comprend implicitement la capacité calorifique du matériau
- $\Rightarrow$ définition d'une seconde grandeur :
    - *Diffusivité thermique* en $m^2.s^{-1}$

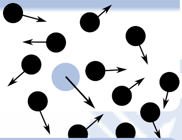
$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \tag{8}$$

    - Analogue au coefficient de diffusion (loi de Fick), à la viscosité cinématique (loi de Newton),...

Conductibilité thermique dans différentes phases

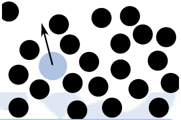
Gaz

- Peu de molécules ⇒ peu de chocs
- Faible conduction de la chaleur



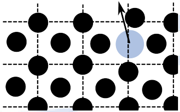
Liquide

- Beaucoup de chocs aléatoires
- Plus grandes conduction que dans les gaz



Solide

- Réseau rigide de molécules ⇒ peu de chocs
- Mais qui se transmettent rapidement dans un cristal
- ⇒ matériaux solides isolants ou conducteurs



Conductibilité thermique : exemples de valeurs

Gaz		
Substance	Temp.	λ
Air	$20°C$	0,0256
	$100°C$	0,0134
CO_2	$20°C$	0,0161
Liquides		
Eau	$20°C$	0,599
	$80°C$	0,670
Méthanol	$20°C$	0,210
Lait	$20°C$	0,56

Solides		
Substance	Temp.	λ
Cuivre	$20°C$	401
Argent	$20°C$	429
Inox	$20°C$	15
PVC	$20°C$	0,17
Béton	$20°C$	1,1
Bois	$20°C$	0,12-0,33
Verre	$20°C$	0,75

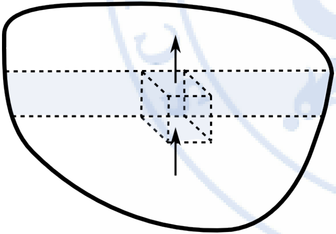
(en $W.m^{-1}.K^{-1}$)

Plan du chapitre

Bilan

Evaluation des quantités entrantes, sortantes, se transformant,... dans un volume défini

- Evaluation de toutes les :
  - Entrées
  - Sorties
  - Accumulation
  - Production
  - Consommation
- Sur un élément :
  - de forme choisie
  - 1D, 2D ou 3D
  - Fermé par des surfaces



Expression générale d'un bilan

$$
\begin{aligned}
\text{Entrées (par les entrées)} &+ \text{Productions (dans l'élément)} = \\
\text{Sorties (par les sorties)} &+ \text{Consommation (dans l'élément)} \\
&+ \text{Accumulation (dans l'élément)}
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\boxed{E + P = S + C + A} \tag{10}
$$

Bilan stationnaire ou instationnaire

Un système est dit en *régime stationnaire* si aucune variation des grandeurs étudiées n'est observée entre deux instants successifs

- Sinon, il est en *régime transitoire ou instationnaire*
- En régime stationnaire, les flux sont constants au cours du temps
- Mais ils ne sont pas forcement nuls
- L'équilibre (flux globaux nuls) est un régime stationnaire
- Mais tout régime stationnaire n'est pas à l'équilibre
- En régime stationnaire, pas d'accumulation, $A = 0$

Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

Plan du chapitre

Mur plan simple

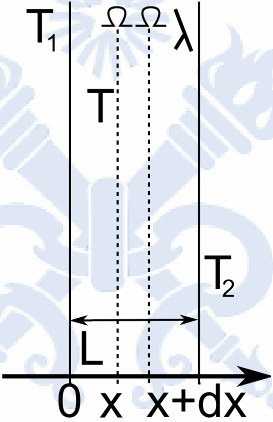
1. Définition du problème

Quel est le profil de température stationnaire dans un mur plan infini d'épaisseur L dont une paroi est maintenu à une température T_1 et l'autre à une température $T_2 < T_1$.

(on connait la réponse)

2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

Problème 1D plan $\Rightarrow$ élément = tranche infinie d'épaisseur dx délimité par deux surfaces d'aires Ω chacune



Expression générale d'un bilan

$$\begin{aligned}
\text{Entrées (par les entrées)} &+ \text{Productions (dans l'élément)} = \\
\text{Sorties (par les sorties)} &+ \text{Consommation (dans l'élément)} \\
&+ \text{Accumulation (dans l'élément)}
\end{aligned} \tag{9}$$

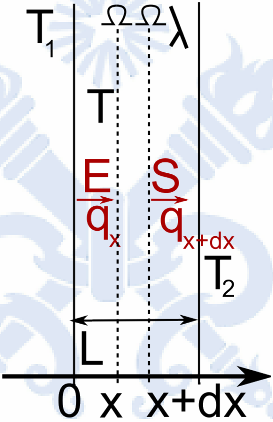
$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{10}$$

3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{11}$$

- E Flux conductif dans la surface en x : $E = q_x \Omega$
- P Pas de production : $P = 0$
- S Flux conductif dans la surface en $x + dx$: $S = q_{x+dx}\Omega$
- C Pas de consommation : $C = 0$
- A Stationnaire : $A = 0$

$$q_x \cancel{\Omega} = q_{x+dx} \cancel{\Omega} \tag{12}$$



4. Développement en série

$$q_x = q_{x+dx} \tag{13}$$

- Comme $dx \to 0$, possible d'approcher q_{x+dx} en fonction de q_x
- Via un développement en série de Taylor du premier ordre

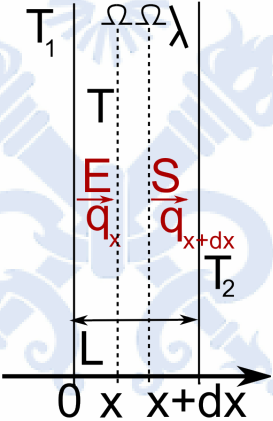
$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx + \cancel{O\left(dx^2\right)} \tag{14}$$

- A introduire dans le bilan

$$\cancel{q_x} = \cancel{q_x} + \frac{dq_x}{dx}dx \tag{15}$$

$$\frac{dq_x}{dx}\cancel{dx} = 0 \tag{16}$$

- La densité de flux est constante



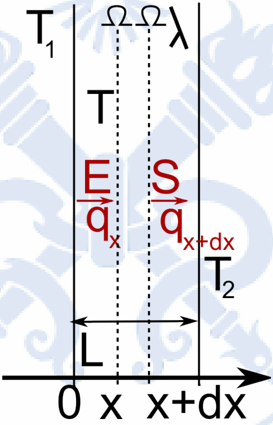
5. Application de la loi de Fourier

$$\frac{dq_x}{dx} = 0 \tag{17}$$

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\lambda \frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \cancel{-\lambda} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \tag{20}$$



6. Conditions aux limites (CL)

$$T = T_1 \quad \text{en} \quad x = 0 \tag{21}$$

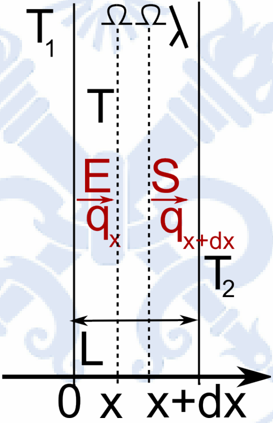
$$T = T_2 \quad \text{en} \quad x = L \tag{22}$$

Pas utile d'adimensionnaliser dans ce cas ci (point 7.)

8. Résolution

- A résoudre

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T}{dx^2} &= 0 & (23)\\
T = T_1 \quad &\text{en} \quad x = 0 & (24)\\
T = T_2 \quad &\text{en} \quad x = L & (25)
\end{aligned}
$$



- Intégration de (23)

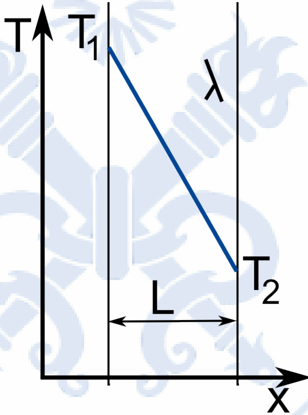
$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dx} &= C_1 & (26)\\
\Leftrightarrow T &= C_1x + C_2 & (27)
\end{aligned}
$$

- Application des CL

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \cancel{C_1 0} + C_2 & (28)\\
T_2 &= C_1L + T_1 & (29)\\
C_1 &= \frac{T_2 - T_1}{L} & (30)
\end{aligned}
$$

9. Analyse des résultats

$$\boxed{T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1} \tag{31}$$



- Profil linéaire (comme prévu !)
- Indépendant de λ
- Mais le flux dépend de λ

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_1 - T_2}{R} \tag{32}$$

- R résistante thermique du mur simple

$$R = \frac{L}{\lambda} \tag{33}$$

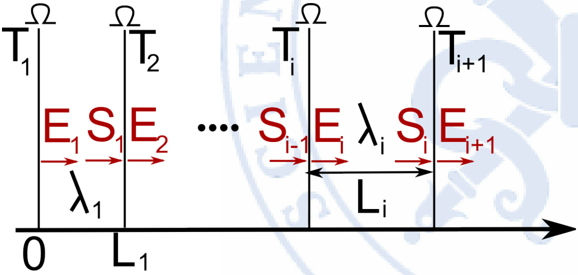
- Cette résistance thermique est souvent donné pour les isolants de construction

Plan du chapitre

Mur plan composite

1. Définition du problème

Quel est la résistance thermique d'un mur plan infini composé de couches successives de n différents matériaux ayant chacun leur épaisseur L_i et leur conductibilité λ_i.



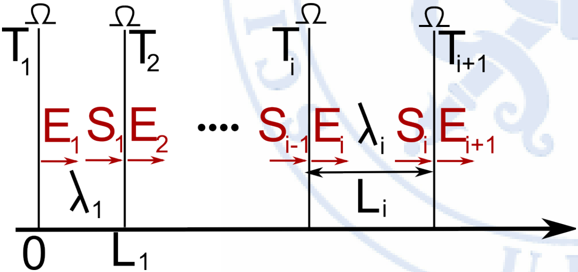
2. Choix de l'élément et 3. Bilan

- Bilan dans chaque matériau $\Rightarrow$ même résultat que le mur simple dans chaque matériaux

$$T = \frac{T_{i+1} - T_i}{L_i} x + T_i \tag{34}$$

- Mais les T_i ne sont pas connus (sauf T_1 et T_{n+1})
- A la limite entre deux matériaux : conservation du flux de chaleur (pas de production ni de consommation)

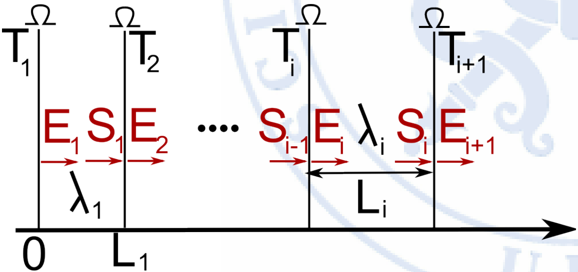
$$S_i = E_{i+1} \tag{35}$$



2. Choix de l'élément et 3. Bilan

$$
\begin{aligned}
S_i &= E_{i+1} && (36)\\
-\lambda_i \frac{T_{i+1} - T_i}{L_i} &= -\lambda_{i+1} \frac{T_{i+2} - T_{i+1}}{L_{i+1}} = q_0 \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 && (37)\\
T_{i+1} - T_i &= q_0 R_i && (38)
\end{aligned}
$$

- $n-1$ équations à $n-1$ inconnues pour connaître les T_i.
- Résolution par remplacement de Gauss
- Autre méthode pour directement avoir R

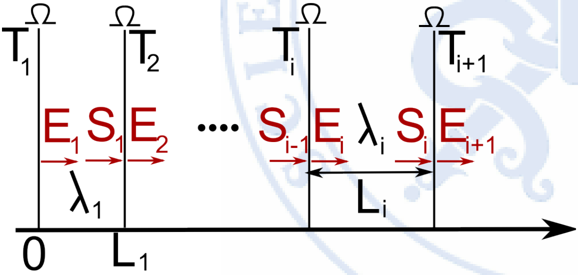


Résolution

$$T_1 - T_{n+1} = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + \ldots + (T_n - T_{n+1}) \quad (39)$$

$$T_1 - T_{n+1} = q_0 R_1 + q_0 R_2 + \ldots + q_0 R_i + \ldots + q_0 R_n \quad (40)$$

$$T_1 - T_{n+1} = q_0 \left(\sum_{i=1}^{n} R_i \right) \quad (41)$$

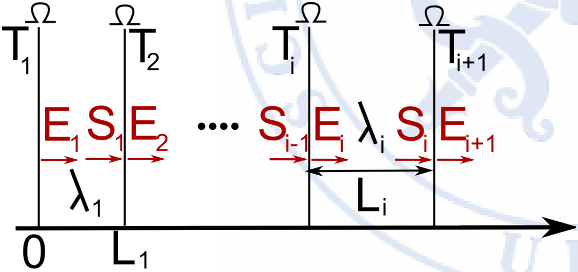


Analyse du résultat

$$q = q_0 = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R} \tag{42}$$

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{\lambda_i}} \tag{43}$$

- Mise en série de résistances
- Comme en électricité
- A compléter avec des mouvements convectifs aux parois



Isolation d'une habitation passive en briques

Image sous licence CC-BY-SA-3.0 (auteur : Mopsi001)

- Pour être considérée comme passive, une habitation doit entre autre avoir des murs caractérisés par une résistnace thermique minimale de $2.5 m^2.K.W^{-1}$.
- Partons d'un mur de briques pleines ($L_1 = 0.24 m, \lambda_1 = 0.8 W.m^{-1}.K^{-1}$)

$$R_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 0.3 \tag{44}$$

- Il faudrait des couches de 2 m d'épaisseur briques pour faire un mur de maison passive juste en brique.

Isolation d'une habitation passive : brique + isolant

Image sous licenceCC-BY-SA-3.0 (auteur : Mopsi001)

- Quelle épaisseur L_2 de laine de verre ($\lambda_2 = 0.04 W.m^{-1}.K^{-1}$) faudrait-il ajouter aux 24cm de briques ?

$$
\begin{aligned}
R &= R_1 + R_2 && (45)\\
R_2 &= \frac{L_2}{\lambda_2} && (46)\\
\Rightarrow L_2 &= \lambda_2 (R - R_1) && (47)\\
&= 0.88 m && (48)
\end{aligned}
$$

- Avec un isolant très performant (panneaux sous vides $\lambda_2 = 0.015 W.m^{-1}.K^{-1}$), 33 cm suffisent.

Plan du chapitre

La conduction stationnaire : résumé

- Transport entre corps en contact direct
- Lié aux collisions des molécules entre elles
- Décrit par la première loi de Fourier

$$\boxed{q_x = -\lambda \frac{dT}{dx}} \tag{49}$$

- λ la conductibilité thermique, capacité du matériaux à transférer la chaleur
- α la diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \tag{50}$$

- Outil clé : le bilan de chaleur

$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{51}$$

- En stationnaire $A = 0$
- Démarche systématique pour résoudre des problèmes de transfert de chaleur

Plan du chapitre

Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

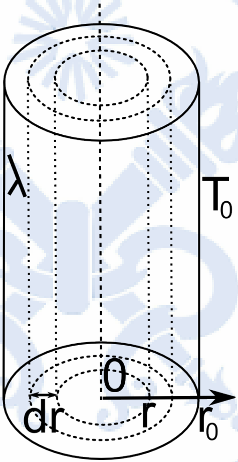
Profil de température dans un fil électrique

1. Définition du problème

Quel est le profil de température stationnaire dans un fil électrique infini de rayon r_0 parcouru par un courant électrique qui génère, par effet Joule, une puissance par unité de volume q_e (en $W.m^{-3}$ uniforme dans tout le fil. La température de surface du fil est maintenue à une valeur T_0.

2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

Problème 1D cylindrique $\Rightarrow$ élément = tranche annulaire infinie d'épaisseur dr délimité par deux surfaces cylindriques concentriques

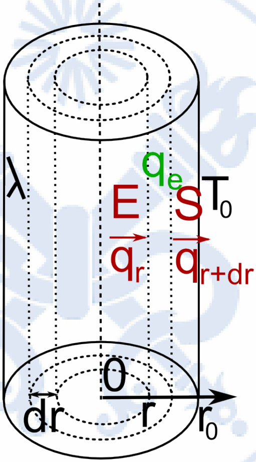


3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{52}$$

- E Flux conductif dans la surface en x : $E = q_r \Omega_r$
- P Production liée à l'effet Joule : $P = q_e \Omega_r dr$
- S Flux conductif dans la surface en $x + dx$: $S = q_{r+dr} \Omega_{r+dr}$
- C Pas de consommation : $C = 0$
- A Stationnaire : $A = 0$

$$q_r \Omega_r + q_e \Omega_r dr = q_{r+dr} \Omega_{r+dr} \tag{53}$$



4. Développement en série

$$(q\Omega)_r + q_e \Omega_r \, dr = (q\Omega)_{r+dr} \qquad (54)$$

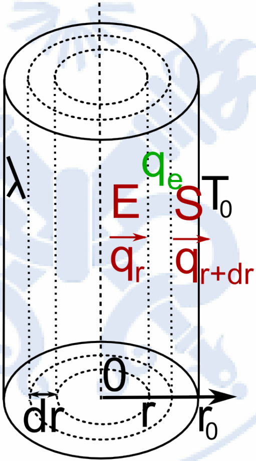
- Comme $dr \to 0$, possible d'approcher $(q\Omega)_{r+dr}$ en fonction de $(q\Omega)_r$
- Via un développement en série de Taylor du premier ordre

$$(q\Omega)_{r+dr} = (q\Omega)_r + \frac{d\,(q\Omega)_r}{dr} dr + \cancel{O\left(dr^2\right)} \qquad (55)$$

- A introduire dans le bilan

$$\begin{aligned} \cancel{(q\Omega)_r} + q_e \Omega_r \, dr &= \cancel{(q\Omega)_r} + \frac{d\,(q\Omega)_r}{dr} dr && (56) \\ \frac{d\,(q\Omega)_r}{dr} \cancel{dr} &= q_e \Omega_r \cancel{dr} && (57) \end{aligned}$$

- Le flux total augmente de par l'apport de chaleur par effet Joule



5. Application de la loi de Fourier

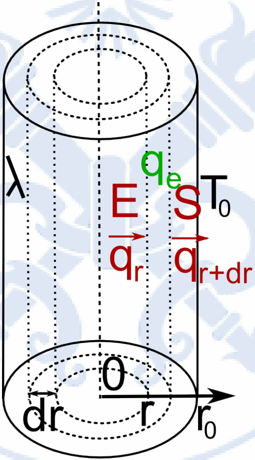
$$\frac{d\,(q\Omega)_r}{dr} = q_e\Omega_r \qquad (58)$$

$$q_r = -\lambda\frac{dT}{dr} \qquad (59)$$

$$\Omega_r = 2\pi r h \qquad (60)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(-\lambda\cancel{2\pi} r\cancel{h}\frac{dT}{dr}\right) = q_e\cancel{2\pi} r\cancel{h} \qquad (61)$$

$$\Rightarrow -\lambda\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = q_e r \qquad (62)$$



6. Conditions aux limites

$$T \text{finie} \quad \text{en} \quad r = 0 \qquad (63)$$

$$T = T_0 \quad \text{en} \quad r = r_0 \qquad (64)$$

Peu utile d'adimensionnaliser dans ce cas ci (point 7.)

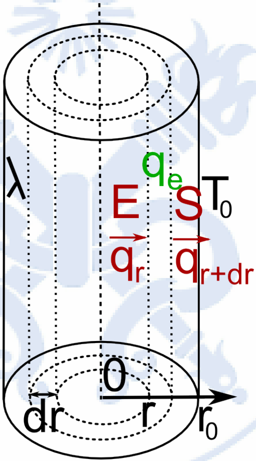
8. Résolution

- A résoudre

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{q_e}{\lambda}r \quad (65)$$

$$T\text{finie} \quad \text{en} \quad r = 0 \quad (66)$$

$$T = T_0 \quad \text{en} \quad r = r_0 \quad (67)$$



- Intégration de (65)

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{q_e r^2}{2\lambda} + C_1 \quad (68)$$

$$\Leftrightarrow T = -\frac{q_e r^2}{4\lambda} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (69)$$

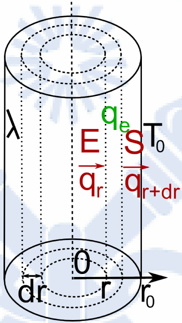
- Application des CL

$$C_1 = 0 \quad (70)$$

$$T_0 = -\frac{q_e r_0^2}{4\lambda} + C_2 \quad (71)$$

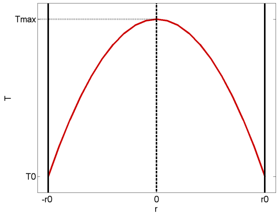
9. Analyse des résultats

$$\boxed{T = T_0 + \frac{q_e r_0^2}{4\lambda}\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)} \qquad (72)$$



- Profil parabolique
- Atteignant une température maximale au centre :

$$T_{max} = T_0 + \frac{q_e r_0^2}{4\lambda} \qquad (73)$$

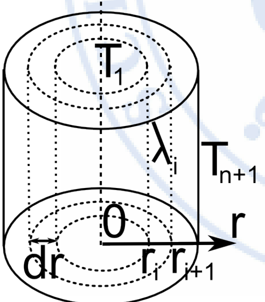


Résistance thermique de la superposition de tubes

$$q_{r_1} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R} \tag{74}$$

$$\boxed{R = r_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \tag{75}$$

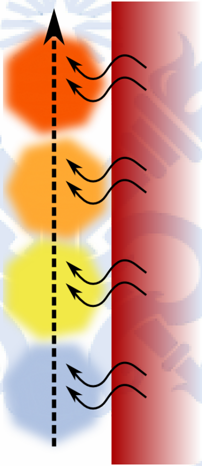
- Analyse similaire à la mise en série de mur
- Pas d'apport de chaleur interne
- C'est un excellent exercice que de refaire le calcul !



Plan du chapitre

Convection : principe

- Transfert de chaleur lié au déplacement des corps
- Un corps qui se déplace emporte l'énergie qu'il contient
- En cours de déplacement : échange de chaleur avec les corps rencontrés (conduction)
- Convection = conduction + advection
- Par définition plus important que le transport par conduction
- Dominant dans les liquides et les gaz
- Dépend fortement de l'écoulement
- Classé suivant la cause du mouvement



Objectif du chapitre

- Expliquer en détail le transfert de chaleur par convection
- Définir une loi empirique pour la convection
- Comprendre comment on arrive
- Dériver et définir une méthodologie pratique pour évaluer la convection
- Illustrer comment conduction et convection sont couplés dans la pratique

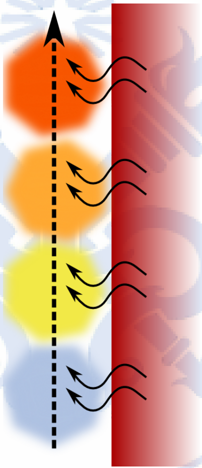
Plan du chapitre

Approche microscopique/locale

- A l'échelle microscopique, le phénomène est le même qu'en conduction.
- MAIS, en convection, les corps bougent les uns par rapport aux autres

Illustration sur un cas simplifié

- Soit un solide chaud immobile à température constante
- En contact avec un fluide froid mobile et renouvelé
- Sur un interval de temps infinitésimal
- Transport conductif entre deux corps immobile
- Déplacement du fluide qui est remplacé par du fluide froid



La convection domine la conduction

- Restons dans notre cas simplifié
- On a transport conduction
- Le fluide est donc un peu plus chaud après un instant

En conduction seule

- Le fluide ne bouge pas (convection à vitesse nulle)
- L'écart de température entre la paroi et le fluide se réduit
- La densité de flux de chaleur par conduction se réduit

Avec la convection

- Le fluide bouge et est remplacé par du fluide froid
- L'écart de température entre la paroi et le fluide reste constant
- La densité de flux de chaleur par conduction reste constante

Déduction

- Le transfert par convection est plus efficace
- Le flux par convection augmente avec la vitesse du fluide
- Pour une vitesse $\to 0$, on s'approche du cas conductif

Approche macroscopique/globale

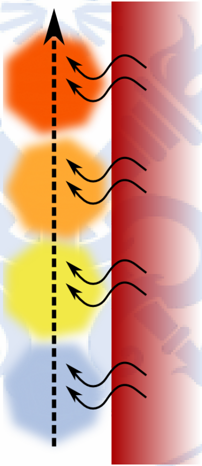
- Convection = conduction + advection
- Densité de flux par conduction : loi de Fourier

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \tag{76}$$

- Densité de flux par advection :

$$q_x = v_x \rho C_p (T - T_{ref}) \tag{77}$$

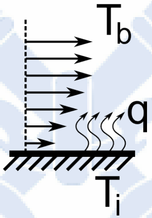
- $\Rightarrow$ dépend de l'écoulement, et donc :
  - des propriétés des fluides
  - de la source du mouvement (convection naturelle ou forcée)
  - de la géométrie du système
- Il n'existe pas une loi simple fondamentale pour la convection
- $\Rightarrow$ approche phénoménologique



Loi de Newton

$$\boxed{q = h\,(T_i - T_b)} \qquad (78)$$

- Loi phénoménologique
- Transfert de chaleur proportionnel à la différence de température entre la surface d'échange T_i et la température au coeur du fluide T_b
- h est le coefficient de transfert de chaleur par convection (en $W.m^{-2}.K^{-1}$)
- h contient les spécificités de l'écoulement :
  - propriétés des fluides
  - source du mouvement (convection naturelle ou forcée)
  - géométrie du système
- La clé est donc de savoir évaluer h



Comment évaluer h ?

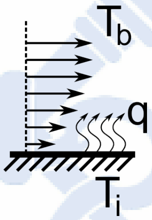
$$h = \frac{q}{(T_i - T_b)} \tag{79}$$

- Pour un $(T_i - T_b)$ fixé, dans des conditions fixées, évaluer q
- Faire le test dans différentes conditions
- En déduire une loi qui donne h dans de larges gammes de conditions
- 3 grandes approches pour obtenir q :

  Expérimentale/empirique On mesure q expérimentalement en fixant $(T_i - T_b)$ (ou l'inverse)

  Théorique Résolution de bilans détaillés pour une situation donnée

  Numérique Résolution numérique (non exacte) de bilans pour une situation donnée



Plan du chapitre

Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

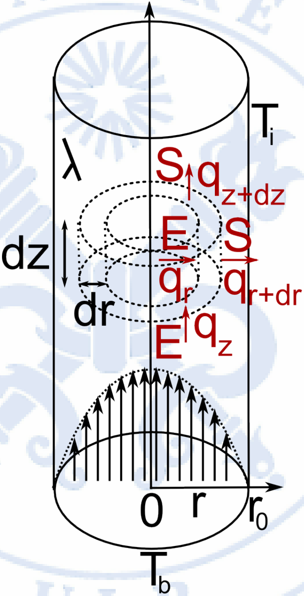
Transfert de chaleur dans une canalisation

1. Définition du problème

Quel est le profil de température obtenu dans un fluide sortant d'une canalisation cylindrique rectiligne de rayon interne r_0 et de longueur L. L'écoulement est laminaire développé et a une vitesse débitante v_m. Le fluide est maintenu à une température T_i, le fluide entre à une température T_b

2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

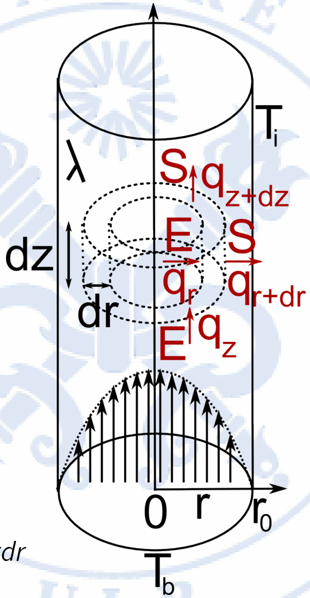
Problème 2D cylindrique $\Rightarrow$ élément = anneau d'épaisseur dr et de hauteur dz



3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \qquad (80)$$

- **E** Flux conductif dans la direction radiale en r et flux convectif dans dans la direction axiale en z : $E = q_r 2\pi r dz + q_z 2\pi r dr$
- **P** Pas de production : $P = 0$
- **S** Flux conductif dans la direction radiale en $r + dr$ et flux convectif dans dans la direction axiale en $z + dz$: $S = q_{r+dr} 2\pi \left(r + dr\right) dz + q_{z+dz} 2\pi r dr$
- **C** Pas de consommation : $C = 0$
- **A** Stationnaire : $A = 0$



$$q_r \cancel{2\pi} r dz + q_z \cancel{2\pi} r dr = q_{r+dr} \cancel{2\pi} \left(r + dr\right) dz + q_{z+dz} \cancel{2\pi} r dr \qquad (81)$$

- Développement en série de Taylor du premier ordre

$$(qr)_{r+dr} = (qr)_r + \frac{d}{dr}(qr)_r\, dr \qquad (82)$$

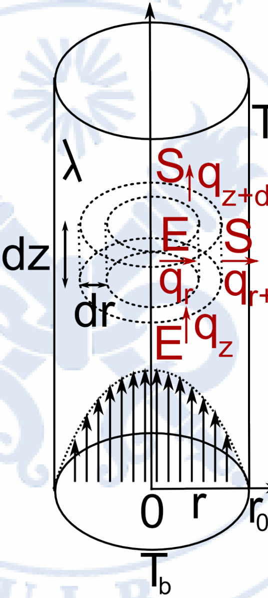
$$q_{z+dz} = q_z + \frac{dq_z}{dz} dz \qquad (83)$$

- Dans les bilans

$$\cancel{q_r r dz} + \cancel{q_z r dr} = \qquad (84)$$

$$\cancel{q_r r dz} + \frac{d}{dr}(qr)_r\, drdz + \cancel{q_z r dr} + \frac{dq_z}{dz} dzrdr$$

$$\frac{d}{dr}(qr)_r\, \cancel{drdz} = -r\frac{dq_z}{dz}\cancel{drdz} \qquad (85)$$



5. Expression des flux

$$\frac{d}{dr}(qr)_r = -r\frac{dq_z}{dz} \quad (86)$$

$$q_r = -\lambda\frac{dT}{dr} \quad (87)$$

$$q_z = v_z C_p (T - T_{ref}) \quad (88)$$

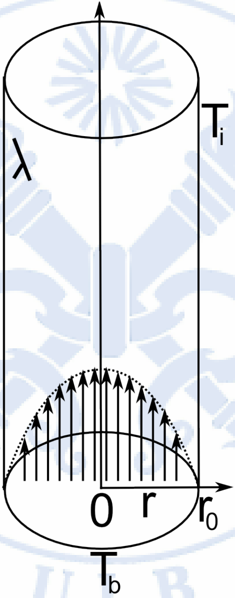
$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\lambda\frac{dT}{dr}r\right) = r\frac{dv_z C_p (T - T_{ref})}{dz} \quad (89)$$

- v_z donné par la loi de Poiseuille :

$$v_z = 2v_m\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \quad (90)$$

- Indépendant de z

$$\lambda\frac{dT}{dr} + r\lambda\frac{d^2T}{dr^2} = 2v_m r\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] C_p\frac{dT}{dz} \quad (91)$$

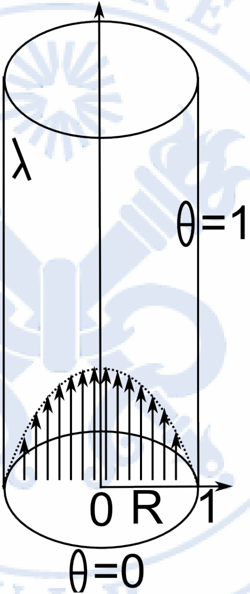


6. Conditions aux limites

$$T = T_i \quad \text{en} \quad r = r_0 \tag{92}$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{en} \quad r = 0 \tag{93}$$

$$T = T_b \quad \text{en} \quad z = 0 \tag{94}$$



7. Adimensionnalisation

$$\theta = \frac{T - T_b}{T_i - T_b} \tag{95}$$

$$R = \frac{r}{r_0} \tag{96}$$

$$Z = \frac{z}{r_0} \tag{97}$$

Pourquoi adimensionnaliser ?

- Pour exprimer les équations dans un référentiel absolu, indépendant des unités choisies
- Pour voir combien de *degrés de libertés* sont réellement présents :
  - Et donc pouvoir discuter plus facilement de l'importance de chaque paramètre,
  - Pour tirer une analyse générique plus facilement ,
- Pour mettre plus facilement en évidence les analogies mathématiques avec d'autres problèmes
- Adimensionnaliser n'est jamais indispensable, mais souvent utile dès que le problème n'est pas simple
- Mais attention, il n'y a pas une seule adimensionnalisation possible. Le tout est de trouver celle qui est la plus pratique pour un problème donné.

7. Adimensionnalisation

$$\lambda \frac{dT}{dr} + \lambda r \frac{d^2T}{dr^2} = 2v_m r \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \rho C_p \frac{dT}{dz} \quad (98)$$

$$\lambda \frac{d\left(\theta + T_b\right)\left(T_i - T_b\right)}{d\left(Rr_0\right)} + \left(Rr_0\right)\lambda \frac{d^2\left(\theta + T_b\right)\left(T_i - T_b\right)}{d\left(Rr_0\right)^2} = \quad (99)$$

$$2v_m\left(Rr_0\right)\left[1 - \left(\frac{\left(Rr_0\right)}{r_0}\right)^2\right] \rho C_p \frac{d\left(\theta + T_b\right)\left(T_i - T_b\right)}{d\left(Zr_0\right)}$$

$$\lambda \frac{\cancel{\left(T_i - T_b\right)}}{r_0}\frac{d\theta}{dR} + \lambda \frac{R\cancel{\left(T_i - T_b\right)}}{r_0}\frac{d^2\theta}{dR^2} = \quad (100)$$

$$2v_m R \rho C_p \cancel{\left(T_i - T_b\right)} \left[1 - R^2\right] \frac{d\theta}{dZ}$$

8. Résolution

- A résoudre

$$\frac{1}{R}\frac{d\theta}{dR} + \frac{d^2\theta}{dR^2} = \frac{2v_m r_0 \rho C_p}{\lambda}\left[1 - R^2\right]\frac{d\theta}{dZ}$$

$$\theta = 1 \quad \text{en} \quad R = 1 \qquad (101)$$

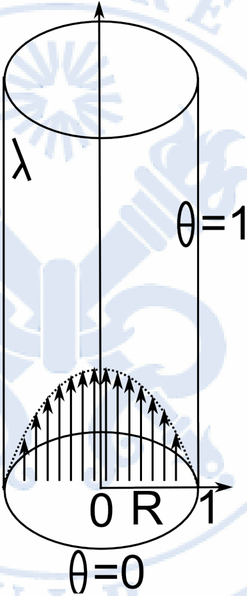
$$\frac{d\theta}{dR} = 0 \quad \text{en} \quad R = 0 \qquad (102)$$

$$\theta = 0 \quad \text{en} \quad Z = 0 \qquad (103)$$

- Le profil de température ne dépend que d'un groupe sans dimension :

$$\frac{2v_m r_0 \rho C_p}{\lambda} = 2\frac{v_m r_0}{\nu}\frac{\nu}{\alpha} = 2\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} \qquad (104)$$

- Avec $\mathrm{Re} = \frac{v_m r_0}{\nu}$, le nombre de Reynolds
- $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$,le nombre de Prandtl

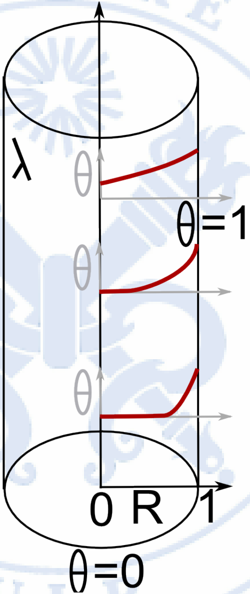


9. Analyse des résultats

- Résolution fort complexe
- Toujours le même type de profil
- Un seul degré de liberté : Re Pr
- Sur base de la solution : calcul d'une densité de flux q de chaleur sortant en $z = L$
- Déduction d'un h global tel que :

$$q = h\,(T_i - T_b) \qquad (105)$$

- Lui aussi ne dépend que de Re Pr et de λ
- On peut en déduire une relation entre λ,h, Re et Pr pour l'écoulement laminaire en conduite



Comment évaluer h ?

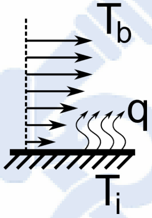
$$h = \frac{q}{(T_i - T_b)} \tag{79}$$

- Pour un $(T_i - T_b)$ fixé, dans des conditions fixées, évaluer q
- Faire le test dans différentes conditions
- En déduire une loi qui donne h dans de larges gammes de conditions
- 3 grandes approches pour obtenir q :

Expérimentale/empirique On mesure q expérimentalement en fixant $(T_i - T_b)$ (ou l'inverse)

Théorique Résolution de bilans détaillés pour une situation donnée

Numérique Résolution numérique (non exacte) de bilans pour une situation donnée



Plan du chapitre

Analyse dimensionnelle

- On peut, en théorie, faire une étude similaire à celle de l'écoulement en tube pour chaque système
- Et en déduire un lien entre h et les grandeurs clés du système
- Quelle forme doit prendre ce lien ? entre quelles grandeurs ?
- Pour y répondre, application de l'analyse dimensionnelle

Grandeurs à prendre en compte

1. Une longueur caractéristique L (en m)
2. La viscosité du fluide ν (en $m^2.s^{-1}$)
3. La masse volumique du fluide ρ (en $kg.m^{-3}$)
4. La capacité calorifique du fluide C_p (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$)
5. La diffusivité thermique du fluide α (en $m^2.s^{-1}$)
6. Le coefficient de transfert de chaleur par convection h en (en $W.m^{-2}.K^{-1}$)
7. La vitesse du fluide v (en $m.s^{-1}$)

7 grandeurs - 4 dimensions (kg, m,s, K) = 3 nombres sans dimensions indépendants

Choix des nombres sans dimensions

- 2 apparaissent dans notre exemple :

  Nombre de Reynolds Caractéristique de l'écoulement

$$\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu} \tag{106}$$

  Nombre de Prandtl Caractéristique du fluide

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu \rho C_p}{\lambda} \tag{107}$$

- Le troisième doit inclure h
- Et par exemple le comparer à λ
- $\Rightarrow$ nombre de Nusselt

$$\mathrm{Nu} = \frac{hL}{\lambda} \tag{108}$$

Corrélations entre nombres sans dimensions

- Pour chaque situation on peut écrire une relation

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right) \tag{109}$$

- On l'obtient (en théorie) via une analyse similaire à celle de l'exemple de l'écoulement dans un tube
- Souvent plutôt basé sur l'expérience
- S'exprime généralement sous la forme

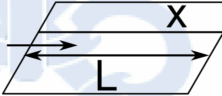
$$\mathrm{Nu} = A\mathrm{Re}^b\mathrm{Pr}^c \tag{110}$$

- Re et Nu dépendent de L, dont la définition dans chaque cas doit être précisée (souvent noté en indice : $\mathrm{Re}_L, \mathrm{Re}_x, \mathrm{Re}_d, \ldots$)
- Changer de définition de L implique de changer de corrélation.

Corrélations en convection forcée
Ecoulement le long d'un plan

- Longueurs caractéristiques : (dans la direction de l'écoulement)
  - L la longueur du plan (Nu_L : global)
  - x la position par rapport au début du plan (Nu_x : local)
- En écoulement laminaire : (pour $\mathrm{Re} < 10^5$ et $0,5 \leq \mathrm{Pr} \leq 10$)

$$\mathrm{Nu}_L = 0,628\mathrm{Re}_L^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad (111)$$
$$\mathrm{Nu}_x = 0,324\mathrm{Re}_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad (112)$$

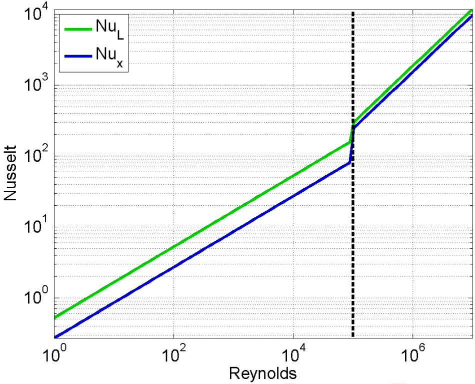


- En écoulement turbulent : (pour $\mathrm{Re} > 10^5$ et $0,5 \leq \mathrm{Pr}$)

$$\mathrm{Nu}_L = 0,035\mathrm{Re}_L^{0,8}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad (113)$$
$$\mathrm{Nu}_x = 0,028\mathrm{Re}_x^{0,8}\mathrm{Pr}^{1/3} \quad (114)$$

Ecoulement le long d'un plan
Illustration

Pour l'eau à 25°C.



Corrélations en convection forcée
Ecoulement dans une conduite

- Longueur L, section de passage Ω, périmètre P
- Longueur caractéristique : diamètre hydraulique

$$d_h = 4\frac{\Omega}{P} \tag{115}$$

- Propriétés $_i$: valeurs à la température de la paroi
- En écoulement laminaire : (pour $\mathrm{RePr}\frac{D}{L} \geq 10$ et $0,5 \leq \mathrm{Pr} \leq 10$)

$$Nu = 1,86 \left(RePr\frac{D}{L} \right)^{1/3} \frac{\rho\nu}{\rho_i \nu_i} \tag{116}$$

- En écoulement turbulent : (pour $\mathrm{Re} > 5000$ et $0,6 \leq \mathrm{Pr} \leq 100$)

$$\mathrm{Nu} = 0,023\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{0,4} \quad \text{si} \quad T_b < T_i \tag{117}$$

$$\mathrm{Nu} = 0,023\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{0,3} \quad \text{si} \quad T_b > T_i \tag{118}$$

Corrélations en convection forcée
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire

- Longueur caractéristique : diamètre du cylindre
- Vitesse évaluée en amont v_{inf}

$$\mathrm{Nu} = A\mathrm{Re}^B\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{119}$$

Re	A	B
0,4-4	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4000	0,683	0,466
4000-40000	0,193	0,618
40000-250000	0,266	0,805

Plan du chapitre

La convection naturelle

- Même principe généraux qu'en convection forcée
- Sauf que l'écoulement dépend du transfert de chaleur
- Raison la plus fréquente : la dilatation thermique
- La masse volumique est une fonction de la température
- Au premier ordre on peut considérer :

$$\rho = \rho_0 + \frac{d\rho}{dT} dT \simeq \rho_0 \left(1 - \beta \Delta T\right) \tag{120}$$

- β est le coefficient de dilatation thermique $(kg.m^{-3}.K^{-1})$

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} \tag{121}$$

- $\beta > 0$ pour la plupart des fluides
- $\Rightarrow$ diminution de la masse volumique lorsque la température augmente
- $\Rightarrow$ Un fluide chauffé monte $\Rightarrow$ Convection naturelle

Vitesse du fluide en convection naturelle

- Le mouvement est généré par une différence $\Delta\rho$ de masse volumique
- On peut montrer que :

$$v \sim \frac{\Delta\rho g L^2}{\mu} = \frac{\beta g \Delta T L^2}{\nu} \tag{122}$$

- $\Rightarrow$ Si on refait une analyse dimensionnelle, on doit remplacer la vitesse par les propriétés du fluide qui la génère

Grandeurs à prendre en compte

1. Une longueur caractéristique L (en m)
2. La viscosité du fluide ν (en $m^2.s^{-1}$)
3. La masse volumique du fluide à la température de référence ρ_0 (en $kg.m^{-3}$)
4. La capacité calorifique du fluide C_p (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$)
5. La diffusivité thermique du fluide α (en $m^2.s^{-1}$)
6. Le coefficient de transfert de chaleur par convection h en (en $W.m^{-2}.K^{-1}$)
7. Le coefficient de dilatation thermique β (en $kg.m^{-3}.K^{-1}$)
8. L'accélération de la gravité g (en $m.s^{-2}$)

8 grandeurs - 4 dimensions (kg, m, s, K) - 1 (car βg apparait toujours comme un seul groupe) = 3 nombres sans dimensions indépendants

Choix des nombres sans dimensions

- Deux identiques à avant

  Nombre de Nusselt Caractéristique de la convection

$$\mathrm{Nu} = \frac{hL}{\lambda} \tag{123}$$

  Nombre de Prandtl Caractéristique du fluide

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu \rho C_p}{\lambda} \tag{124}$$

- Le troisième doit représenter l'écoulement (l'équivalent du Re en convection forcée)
- Si on remplace v par l'expression (122) dans l'expression de Re
- On obtient le nombre de Grashof

$$\mathrm{Gr} = \frac{vL}{\nu} = \frac{\beta g \Delta TL^3}{\nu^2} \tag{125}$$

- Corrélations similaire à celles en convection forcée

Corrélations en convection naturelle

$$\mathrm{Nu} = A\,(\mathrm{Gr\,Pr})^{B} \tag{126}$$

Géométrie	Gr Pr	A	B
Plaque et cylindres verticaux	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
	$10^9 - 10^{13}$	0,021	2/5
Cylindres horizontaux	$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
	$10^{-2} - 10^{2}$	1,02	0,148
	$10^{2} - 10^{4}$	0,85	0,188
	$10^{4} - 10^{7}$	0,48	0,25
	$10^{7} - 10^{10}$	0,125	0,33
Face supérieur/inférieure d'une plaque chaude/froide	$2.10^4 - 8.10^6$	0,54	1/4
	$8.10^6 - 10^{11}$	0,15	1/3
Face supérieur/inférieure d'une plaque froide/chaude	$10^5 - 10^{11}$	0,27	1/4

Plan du chapitre

La convection stationnaire : résumé

- Transport dans un corps en mouvement
- Convection = conduction + advection
- Décrit par la loi empirique de Newton

$$\boxed{q = h\,(T_i - T_b)} \tag{127}$$

- h est le coefficient de transfert de chaleur
- h dépend essentiellement de l'écoulement

Convection forcée

- L'écoulement est indépendant du transfert de chaleur

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Re},\,\mathrm{Pr}) \tag{128}$$

Convection naturelle

- L'écoulement est généré par le transfert de chaleur (variation de la masse volumique)

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Gr},\,\mathrm{Pr}) \tag{129}$$

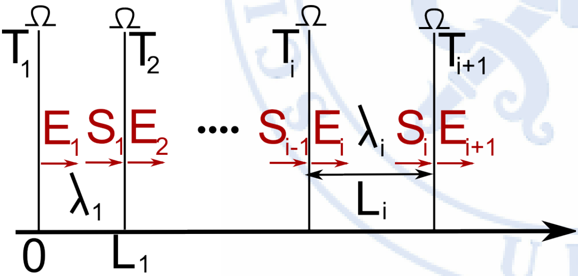
Plan du chapitre

Analyse du résultat

$$q = q_0 = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R} \tag{42}$$

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{\lambda_i}} \tag{43}$$

- Mise en série de résistances
- Comme en électricité
- A compléter avec des mouvements convectifs aux parois



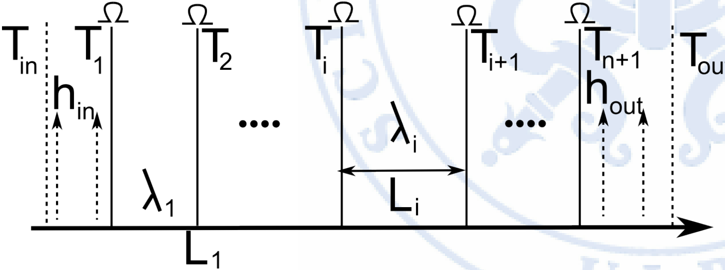
Limitation complémentaire par convection

- De part et d'autre on peut avoir une résistance par convection
- A prendre en compte dans le bilan

$$T_{in} - T_{out} = (T_{in} - T_1) + \ldots + (T_n - T_{n+1}) + (T_{n+1} - T_{out}) \quad (130)$$

$$T_{in} - T_{out} = q_0/h_{in} + q_0 R_1 + \ldots + \ldots + q_0 R_n + q_0/h_{out} \quad (131)$$

$$T_{in} - T_{out} = q_0 \left(\frac{1}{h_{in}} + \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{1}{h_{out}} \right) \quad (132)$$

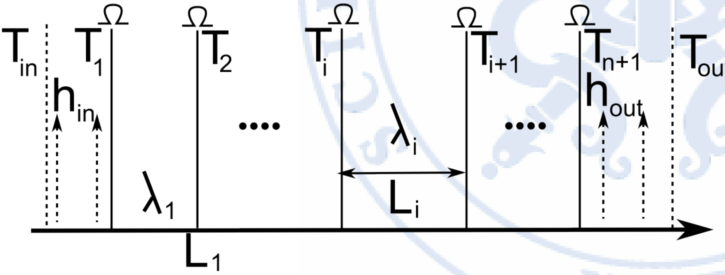


Résistances en série avec convection

$$q = q_0 = \frac{T_{in} - T_{out}}{R} \tag{133}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{h_{in}} + \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{1}{h_{out}} = \frac{1}{h_{in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_{out}}} \tag{134}$$

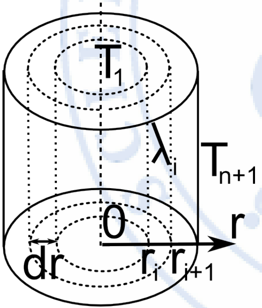
- Convection = 2 résistances en série supplémentaires



De la même manière en cylindrique

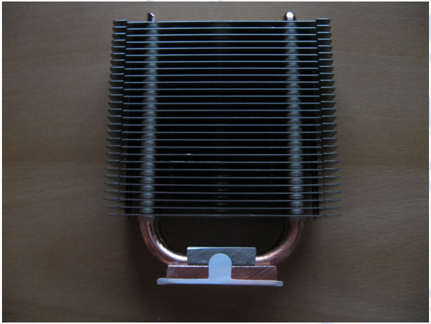
$$q = \frac{T_{in} - T_{out}}{R} \tag{135}$$

$$\boxed{R = r_1 \left(\frac{1}{r_1 h_{in}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{r_n h_{out}} \right)} \tag{136}$$



Plan du chapitre

Exemples d'ailettes



Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

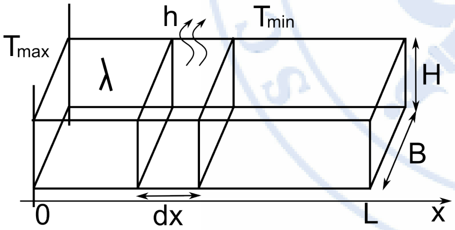
Transfert de chaleur par une ailette

1. Définition du problème

Quel est le flux de chaleur d'une ailette unique de longueur L évacuant la chaleur d'un solide à une température T_{max} vers un environnement à une température T_{min}

2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

Problème 1D plan $\Rightarrow$ élément = tranche d'épaisseur dx et de section HB

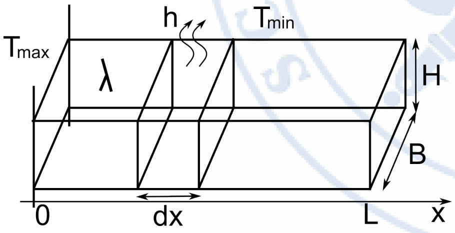


3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{137}$$

- E Flux conductif dans la direction x : $E = q_x HB$
- P Pas de production : $P = 0$
- S Flux conductif dans la direction x et flux convectif latéral : $S = q_{x+dx} HB + 2q_z B dx$
- C Pas de consommation : $C = 0$
- A Stationnaire : $A = 0$

$$q_x H\cancel{B} = q_{x+dx} H\cancel{B} + 2q_z \cancel{B} dx \tag{138}$$



4. Développement en série

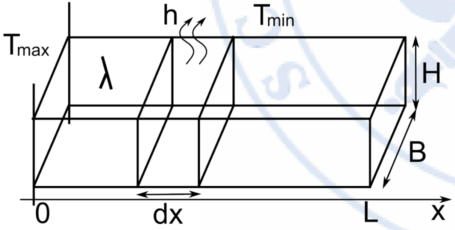
- Développement en série de Taylor du premier ordre

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx + \cancel{O\left(dx^2\right)} \tag{139}$$

- Dans les bilans

$$\cancel{q_x H} = \cancel{q_x H} + \frac{dq_x}{dx}dxH + 2q_z dx \tag{140}$$

$$\frac{dq_x}{dx}\cancel{dx}H = -2q_z\cancel{dx} \tag{141}$$



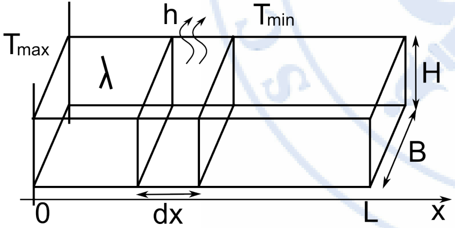
5. Expression des flux

$$\frac{dq_x}{dx} H = -2q_z \quad (142)$$

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (143)$$

$$q_z = h\,(T - T_{min}) \quad (144)$$

$$\Rightarrow -\lambda H \frac{d^2 T}{dx^2} = -2h\,(T - T_{min}) \quad (145)$$



6. Conditions aux limites

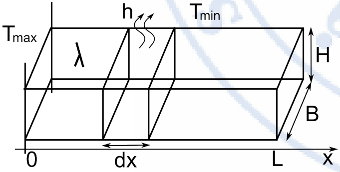
$$T = T_{max} \quad \text{en} \quad x = 0 \tag{146}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x = L \tag{147}$$

7. Adimensionnalisation

$$\theta = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \tag{148}$$

$$X = \frac{x}{L} \tag{149}$$



7. Adimensionnalisation

$$\lambda H \frac{d^2 T}{dx^2} = 2h\left(T - T_{min}\right) \quad (150)$$

$$\lambda \cancel{(T_{max} - T_{min})} H \frac{d^2 \theta}{d\left(XL\right)^2} = 2h \cancel{(T_{max} - T_{min})} \theta \quad (151)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} = \frac{2hL^2}{\lambda H} \theta \quad (152)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} = S^2 \theta \quad (153)$$

$$S^2 = \frac{2hL^2}{\lambda H} \quad (154)$$

7. Adimensionnalisation des CL

$$
\begin{aligned}
T &= T_{max} \quad \text{en} \quad x = 0 && (155)\\
T_{min} + \theta \left(T_{max} - T_{min} \right) &= T_{max} \quad \text{en} \quad X\cancel{L} = 0 && (156)\\
\theta = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} &= 1 \quad \text{en} \quad X = 0 && (157)\\
\frac{dT}{dx} &= 0 \quad \text{en} \quad x = L && (158)\\
\frac{d\cancel{T_{min}} + \theta \left(T_{max} - T_{min} \right)}{dXL} &= 0 \quad \text{en} \quad X\cancel{L} = \cancel{L} && (159)\\
\cancel{\frac{\left(T_{max} - T_{min} \right)}{L}} \frac{d\theta}{dX} &= 0 \quad \text{en} \quad X = 1 && (160)\\
\frac{d\theta}{dX} &= 0 \quad \text{en} \quad X = 1 && (161)
\end{aligned}
$$

Nombre sans dimension S

$$\boxed{S^2 = \frac{2hL^2}{\lambda H}} \tag{162}$$

- Seule constante apparaissant dans l'équation
- Différentes ailettes ayant le même S présentent la même solution adimensionnalisée
- S suffit pour caractériser une ailette
- S compare la vitesse de transfert par convection (dans l'air) à la conduction (dans le solide).
- S^2 est cas particulier de nombre de Biot tel que nous rencontrerons en transfert instationnaire. (ici la longueur caractéristique est L^2/H)

8. Résolution

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dX^2} = S^2\theta} \tag{163}$$

- EDO du second ordre
- La solution générale C est la combinaison linéaires de 2 solutions particulières θ_1, θ_2

$$\theta = A\theta_1 + B\theta_2 \tag{164}$$

- On essaye $\theta_1 = \exp(\eta X)$ (avec η à identifier)

$$\frac{d^2\theta_1}{dX^2} = S^2\theta_1 \tag{165}$$

8. Résolution (2)

$$\frac{d^2 \exp(\eta X)}{dX^2} = S^2 \exp(\eta X) \quad (166)$$

$$\eta^2 \cancel{\exp(\eta X)} = S^2 \cancel{\exp(\eta X)} \quad (167)$$

$$\eta = \pm S \quad (168)$$

- On a 2 solutions

$$\theta_1 = \exp(SX) \quad (169)$$

$$\theta_2 = \exp(-SX) \quad (170)$$

- Solution générale

$$\theta = A \exp(SX) + B \exp(-SX) \quad (171)$$

- Détermination de A et B avec les conditions aux limites

Identification des constantes

$$\theta(0) = 1 \tag{172}$$

$$A + B = 1 \tag{173}$$

$$\left.\frac{d\theta}{dX}\right|_{X=1} = 0 \tag{174}$$

$$AS\exp(SX) - BS\exp(-SX)|_{X=1} = 0 \tag{175}$$

$$A\exp(S) - B\exp(-S) = 0 \tag{176}$$

$$A = 1 - B = \frac{\exp(-S)}{(\exp(S) + \exp(-S))} \tag{177}$$

$$\theta = \frac{\exp(S(1-X)) + \exp(-S(1-X))}{\exp(S) + \exp(-S)} \tag{178}$$

Rappel : fonctions hyperboliques

Par définition :

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad (179)$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad (180)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} \quad (181)$$

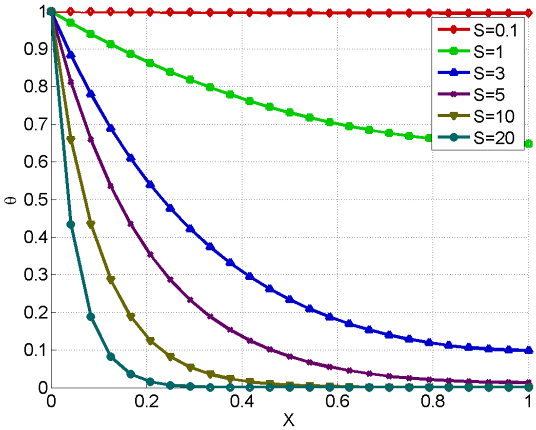
On déduit aisément :

$$\frac{d\sinh(x)}{dx} = \cosh(x) \quad (182)$$

$$\frac{d\cosh(x)}{dx} = \sinh(x) \quad (183)$$

9. Analyse des résultats

$$\boxed{\theta = \frac{\cosh\left(S\left(1-X\right)\right)}{\cosh\left(S\right)}} \qquad (184)$$



9. Analyse des résultats

$$\boxed{S^2 = \frac{2hL^2}{\lambda H}} \qquad (185)$$

$S \gg$

- La convection domine la conduction
- Le transfert est donc limité par la conduction
- La température chute significativement dès que l'on quitte la source

$S \ll$

- La conduction domine la convection
- Le transfert est donc limité par la convection
- La température est quasi constante tout le long de l'ailette

Quel est le meilleur ? Ca dépend

- Si l'on veut le meilleur transfert par unité de longueur $S \ll$
- Si l'on veut une température basse au bout $S \sim 5$ (plus ne sert à rien !)

Plan du chapitre

L'ingénierie du samedi soir

Image modifiée sous licence CC-BY-SA-3.0 (auteur : Nevit)

- Vos invités du samedi soir vous offrent une bouteille à boire bien fraîche
- Après combien de temps au frigo sera-t-elle à bonne température ?
- C'est un problème instantionnaire !

Données (Propriétés proches de celles de l'eau)

- $r_0 = 0,041 m$
- $H = 0,02 m$
- $C_p = 4 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
- $\rho = 1000 kg.m^{-3}$
- $T_{ini} = 20^\circ C$
- $T_s = 4^\circ C$
- $\lambda = 0,6 W.m^{-1}.K^{-1}$
- $h = 20 W.m^{-2}.K^{-1}$

Plan du chapitre

2. Modes de transport de la chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
   - Description générale
   - Résistance interne négligeable
   - Conduction instationnaire dans un volume semi-infini
   - Conduction instationnaire dans un volume fini
6. Echangeurs de chaleur

Instationnarité = terme d'accumulation

- Instationnaire ⇒ change au cours du temps ⇒ Accumulation (positive ou négative)
- Variation au cours du temps d'une quantité de chaleur Q_C dans un volume V

$$Q_c = \rho V C_p \left(T - T_{ref}\right) \tag{186}$$

$$A = \frac{dQ_c}{dt} = \frac{dV\rho C_p\left(T - T_{ref}\right)}{dt} \tag{187}$$

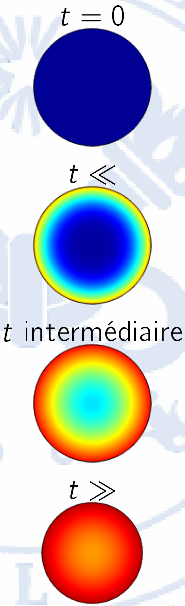
- Pour V, ρ et C_p constants

$$\boxed{A = V\rho C_p \frac{dT}{dt}} \tag{188}$$

- Ajout de la dimension temporelle :
  - Besoin de résoudre une EDP pour un problème 1D
  - Ajout de conditions initiales (en plus des conditions aux limites)
  - Problèmes rapidement très complexes

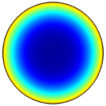
Description d'une situation simple

- Corps de volume V et de surface externe d'aire Ω
- Initialement à une température T_{ini} uniforme et instantanément (en $t = 0$) plongé dans un milieu à une température T_s
- 3 étapes successives dans le temps :
  1. Au début : les parties éloignées de la surface n'ont pas encore changé de température
  2. Plus tard : tout le solide a été affecté, des gradients de température sont observés
  3. A la fin : la température continue à changer mais uniformément dans le solide
- Approche simplifiée des différentes étapes



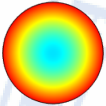
Différentes étapes

Temps initiaux



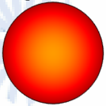
Volume semi-infini

Temps intermédiaire

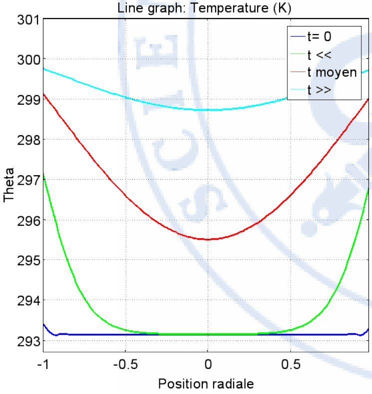


Volume fini

Longs temps



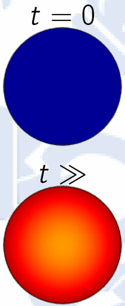
Résistance interne négligeable



Plan du chapitre

Etape à température uniforme

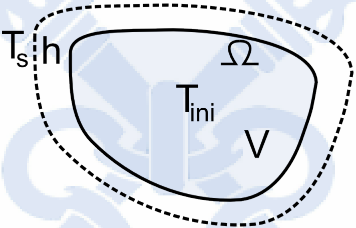
- A la fin : la température continue à changer mais uniformément dans le solide
- Situation équivalente à un transfert instantané dans le solide
- Tout ce qui arrive en surface est réparti uniformément dans le solide
- La résistance au transfert de chaleur interne est négligeable
- Négligeable devant le transfert externe convectif en surface du corps.



Résistance interne négligeable

1. Définition du problème

Soit un corps de volume V et de surface externe d'aire Ω initialement à une température T_{ini} et instantanément (en $t = 0$) plongé dans un milieu à une température T_s. Le coefficient de transfert de chaleur convectif autour du corps vaut h. Comment évolue au cours du temps la température du corps, supposée uniforme dans l'espace ?



2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

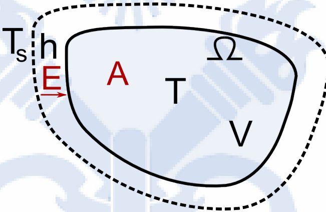
Problème 0D élément = tout le volume V

Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \qquad (189)$$



- E Loi de Newton au travers de la surface : $E = h(T_s - T)\Omega$
- P Pas de production : $P = 0$
- S Pas de sortie $S = 0$
- C Pas de consommation : $C = 0$
- A Instationnaire : $A = V\rho C_p \frac{dT}{dt}$

$$h(T_s - T)\Omega = V\rho C_p \frac{dT}{dt} \qquad (190)$$

Jusqu'au 8.

6. Condition initiale

$$T = T_{ini} \text{ en } t = 0 \tag{191}$$

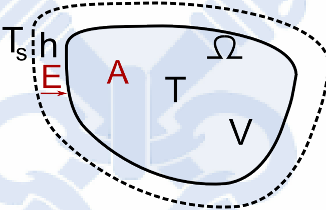
8. Résolution

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p}(T_s - T) \tag{192}$$

$$\int_{T_{ini}}^{T} \frac{dT}{(T_s - T)} = \int_0^t \frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p} dt \tag{193}$$

$$\ln\left(\frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s}\right) = -\frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p} t \tag{194}$$

$$\frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s} = \exp\left[-\frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p} t\right] \tag{195}$$



9. Analyse des résultats

$$\boxed{\frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s} = \exp\left[-\frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p}t\right]} \quad (196)$$

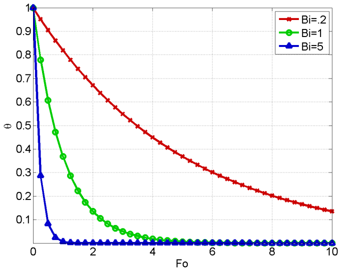
- Sous forme adimensionnelle on a :

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s} \quad (197)$$

$$\frac{\Omega}{V}\frac{h}{\rho C_p}t = \frac{Vh}{\Omega\lambda}\frac{\lambda}{\rho C_p}t\frac{\Omega^2}{V^2} \quad (198)$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hV}{\lambda\Omega} \quad (199)$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t\Omega^2}{V^2} \quad (200)$$



$$\boxed{\theta = \exp\left[-\mathrm{FoBi}\right]} \quad (201)$$

Nombres sans dimension

Nombre de Biot

- Compare convection dans le fluide et conduction dans le solide (Nu les compares dans le même milieu)
- Hypothèse de résistance interne négligeable valable si Bi $< 0,1$

Nombre de Fourier

- Temps adimensionnel
- Compare le temps déjà écoulé à l'ordre de grandeur du temps nécessaire à transférer de la chaleur sur une longueur V/Ω

Choix de l'adimensionnalisation

- Tant que c'est adimensionnel, tout choix pour adimensionnaliser est bon
- Certains choix sont plus pratiques que d'autres
- Ici, la température a été adimensionnalisée par

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s} \tag{202}$$

- Un autre choix courant (dans la littérature, voir aussi plus loin dans le cours)

$$\check{\theta} = \frac{T - T_{ini}}{T_{ini} - T_s} \tag{203}$$

- Les deux sont liés

$$\check{\theta} = 1 - \theta \tag{204}$$

L'ingénierie du samedi soir

- Vos invités du samedi soir vous offrent une bouteille à boire bien fraîche
- Après combien de temps au frigo sera-t-elle à bonne température ?
- C'est un problème instantionnaire !

Données (Propriétés proches de celles de l'eau)

- $r_0 = 0,041m$
- $H = 0,02m$
- $C_p = 4kJ.kg^{-1}.K^{-1}$
- $\rho = 1000kg.m^{-3}$
- $T_{ini} = 20^\circ C$
- $T_s = 4^\circ C$
- $\lambda = 0,6W.m^{-1}.K^{-1}$
- $h = 20W.m^{-2}.K^{-1}$

La bouteille, résistance négligeable ?

- Pour que la bouteille (assimilée à un cylindre) soit à 12° C

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_{ini} - T_s} = \frac{12 - 4}{20 - 4} = 0,5 \tag{205}$$

- Dans l'équation (201), avec la définition de Bi (199)

$$\begin{aligned} \text{FoBi} &= -\ln\theta && (206) \\ \text{Bi} &= \frac{hV}{\lambda\Omega} = 2,25 && (207) \\ \Rightarrow \text{Fo} &= 0,31 && (208) \end{aligned}$$

- Par définition du nombre de Fourier

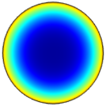
$$t = \frac{\text{Fo} V^2}{\alpha\Omega^2} = 4358s \tag{209}$$

- Si résistance interne négligeable, il faut laisser la bouteille au moins 1h12

Plan du chapitre

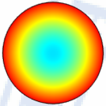
Différentes étapes

Temps initiaux



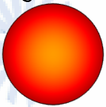
Volume semi-infini

Temps intermédiaire

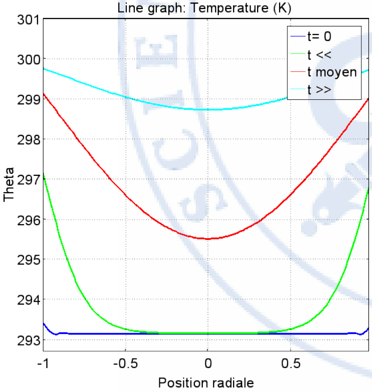


Volume fini

Longs temps



Résistance interne négligeable



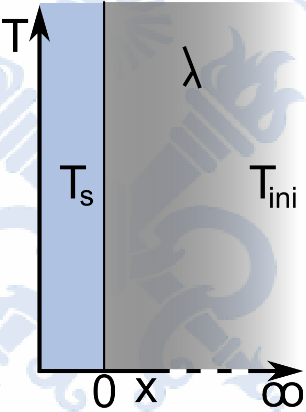
Conduction instationnaire dans un volume semi-infini

1. Définition du problème

Soit une surface plane infinie délimitant un objet solide semi-infini initialement à une température T_{ini} et instantanément (en $t = 0$) plongé dans un milieu à une température T_s. A un instant donné, à quelle profondeur maximale la température est-elle affectée ?

2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan

Problème 1D plan $\Rightarrow$ élément = tranche infinie d'épaisseur dx délimité par deux surfaces d'aires Ω chacune



Méthodologie systématique de résolution d'un bilan

1. Définition du problème
2. Choix de l'élément sur lequel on réalise le bilan
3. Ecriture des bilans
4. Développement en série
5. Application de lois phénoménologiques (Loi de Fourier)
6. Ecriture des conditions aux limites (CL) et initiales (CI)
7. (Adimensionnalisation)
8. Résolution des équations obtenues avec leurs CL
9. Interprétation des résultats

Expression générale d'un bilan

$$\begin{aligned} \text{Entrées (par les entrées)} &+ \text{Productions (dans l'élément)} = \\ \text{Sorties (par les sorties)} &+ \text{Consommation (dans l'élément)} \\ &+ \text{Accumulation (dans l'élément)} \end{aligned} \tag{9}$$

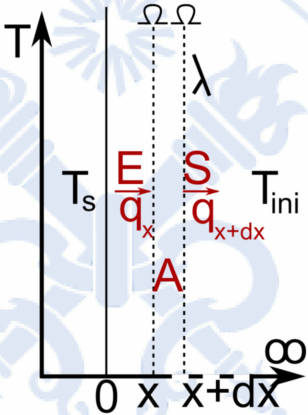
$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{10}$$

3. Ecriture du bilan

$$\boxed{E + P = S + C + A} \tag{210}$$

- E Flux conductif dans la surface en x : $E = q_x \Omega$
- P Pas de production : $P = 0$
- S Flux conductif dans la surface en $x + dx$: $S = q_{x+dx}\Omega$
- C Pas de consommation : $C = 0$
- A Instationnaire : $A = \Omega dx \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

$$q_x \cancel{\Omega} = q_{x+dx}\cancel{\Omega} + \cancel{\Omega} dx \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{211}$$



4. Développement en série

$$q_x = q_{x+dx} + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \qquad (212)$$

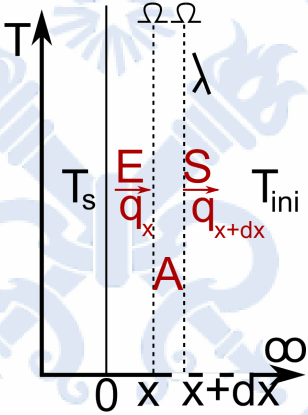
- Comme $dx \to 0$, possible d'approcher q_{x+dx} en fonction de q_x
- Via un développement en série de Taylor du premier ordre

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx + \cancel{O\left(dx^2\right)} \qquad (213)$$

- A introduire dans le bilan

$$\cancel{q_x} = \cancel{q_x} + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dx} \qquad (214)$$

$$\frac{dq_x}{dx} \cancel{dx} = -\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dx} \qquad (215)$$



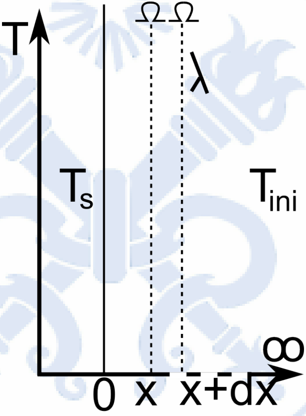
5. Application de la loi de Fourier

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (216)$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (217)$$

$$\Rightarrow \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad (218)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (219)$$



6. Conditions initiales et aux limites

$$T = T_{ini} \quad \text{en} \quad t = 0 \forall x \geq 0 \quad (220)$$

$$T = T_s \quad \text{en} \quad x = 0 \forall t \geq 0 \quad (221)$$

$$T = T_{ini} \quad \text{en} \quad x \rightarrow +\infty \forall t \geq 0 \quad (222)$$

8. Résolution

- Solution connue :

$$\frac{T - T_{ini}}{T_s - T_{ini}} = \check{\theta} = 1 - erf\left(\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right) \tag{223}$$

- Dépend d'un seul argument :

$$Z = \left(\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right) = \left(\frac{x}{2L\mathrm{Fo}^{1/2}}\right) \tag{224}$$

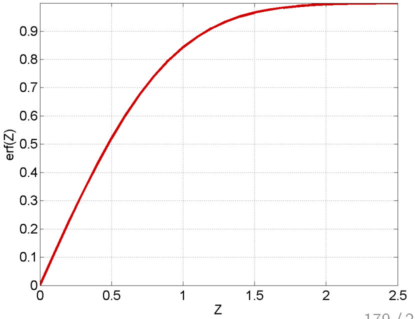
La fonction d'erreur

$$erf\,(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z \exp\left(-t^2\right) dt \tag{225}$$

- Intégrée dans la plupart des logiciels (Matlab, Excel, R, ...)
- Tabulées (dans les tables des séances d'exercices)
- Egalement la fonction d'erreur complémentaire :

$$erfc\,(Z) = 1 - erf\,(Z) \tag{226}$$

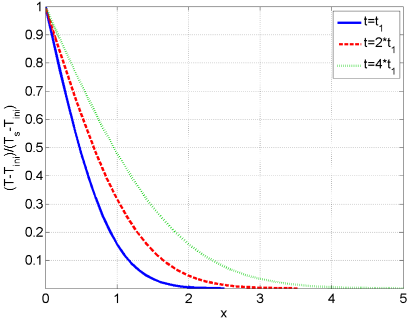
Z	$erf(Z)$	Z	$erf(Z)$
0,0	0,0000	1,4	0,9523
0,2	0,2227	1,6	0,9763
0,4	0,4284	1,8	0,9891
0,6	0,6039	2,0	0,9953
0,8	0,7421	2,2	0,9981
1,0	0,8427	2,4	0,9993
1,2	0,9103	$+\infty$	1



9. Analyse des résultats

$$\boxed{\theta = erf\left(\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right)} \qquad (227)$$

- A un instant donné : profil de température dans le massif
- A une valeur de $Z = \left(\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right)$ correspond une température constante
- $\Rightarrow$ au cours du temps, une température donnée pénètre dans le massif $x \sim (\alpha t)^{1/2}$



Longueur de pénétration

- Distance δ à laquelle la température a changé de 1% par rapport à T_{ini} à l'instant t

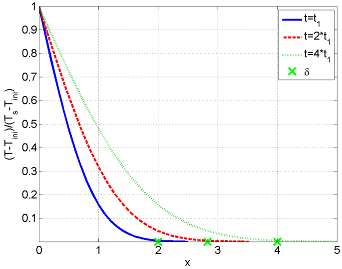
$$\check{\theta} = 0,01 \qquad (228)$$

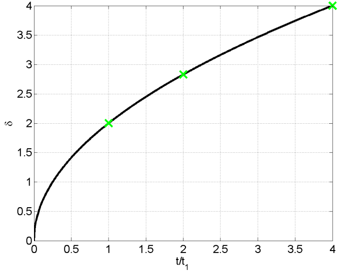
$$erf\left(\frac{\delta}{(4\alpha t)^{1/2}}\right) = 0,99 \qquad (229)$$

$$\frac{\delta}{(4\alpha t)^{1/2}} \simeq 2 \qquad (230)$$

$$\delta \simeq 4\,(\alpha t)^{1/2} \qquad (231)$$

- Permet de savoir jusqu'où la chaleur a pénétré
- Pour un objet réel d'épaisseur L, permet de vérifier l'hypothèse de massif semi-infini $\delta \ll L$





Revenons à la bouteille

Image modifiée sous licence CC-BY-SA-3.0 (auteur : Nevit)

- En résistance interne négligeable, toute la bouteille à $T = 12^\circ C$: 1h12
- Si massif semi-infini, temps nécessaire à ce que le centre de la bouteille $x = r_0$ soit à $T = 12^\circ C$ (le reste est plus froid)

Massif semi infini

$$\theta = 0.5 \tag{232}$$

$$\Rightarrow Z = \left(\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right) = 0.5 \tag{233}$$

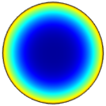
$$t = \frac{(2r_0)^2}{4\alpha} = 11728s \tag{234}$$

- Il faudrait donc 3h15
- Mais, ce n'est pas un massif semi-infini !

Plan du chapitre

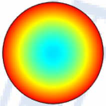
Différentes étapes

Temps initiaux



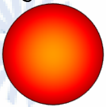
Volume semi-infini

Temps intermédiaire

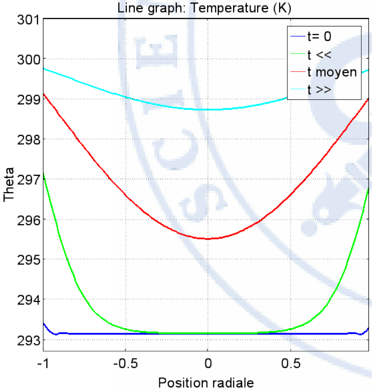


Volume fini

Longs temps



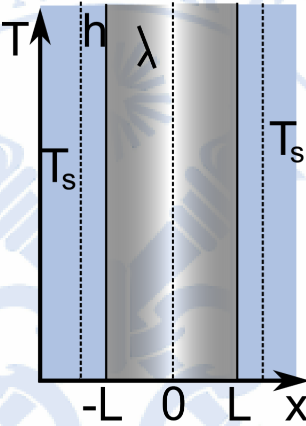
Résistance interne négligeable



Géométries simplifiées

- Si les hypothèses des massifs semi-infini et de résistance interne négligeable ne sont pas vérifiés
- Possibilité de résoudre les bilans
- Dans des conditions simplifiées :
  - initialement à une température T_{ini} uniforme
  - instantanément (en $t = 0$) plongé dans un milieu à une température T_s
  - avec un coefficient de transfert de chaleur convectif h à la surface
- Pour des geometries simplifiées :
  - Plaque infinie d'épaisseur $2L$
  - Cylindre infini de rayon R
  - Sphère de rayon R
- Valeurs de température au centre tabulées

Plaque infinie



- Bilan menant à la même équation que pour le massif semi-infini (equation 219)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{235}$$

- Avec d'autres conditions initiales et aux limites

$$T = T_{ini} \text{ en } t = 0 \quad \forall \quad -L \geq x \geq L \tag{236}$$

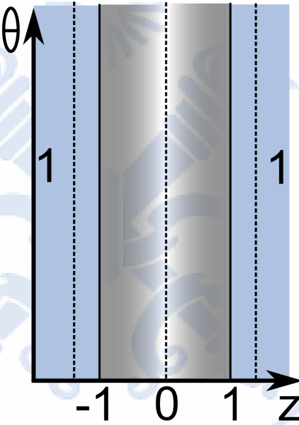
$$q = \mp h \left(T_s - T_{x=\pm L} \right) \text{ en } x = \pm L \quad \forall \quad t \geq 0 \tag{237}$$

Adimensionnalisation

- Même adimensionnalisation que précédemment

$$z = \frac{x}{L} \quad (238)$$

$$\theta = \frac{T - T_{ini}}{T_s - T_{ini}} \quad (239)$$



- Nombre de Fourier : temps adimensionnel

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (240)$$

- Flux de chaleur adimensionnalisé q_{ad} par un flux de chaleur de référence q_r

$$q_{ad} = \frac{q}{q_r} = \frac{h\left(T_s - T_{x=\pm L}\right)}{\frac{\alpha}{L}\left(T_s - T_{ini}\right)} \quad (241)$$

$$q_{ad} = \pm \mathrm{Bi}\,\theta_{z=\pm 1} \quad (242)$$

Système adimensionnalisé

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} && (243)\\
q_{ad} &= \pm \mathrm{Bi}\theta_{z=\pm 1} \text{ en } z = \pm 1 \forall \mathrm{Fo} > 0 && (244)\\
\theta &= 0 \text{ en } \mathrm{Fo} = 0 \forall z && (245)
\end{aligned}
$$

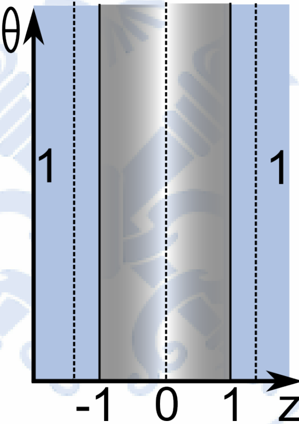
- Solution :

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2\mathrm{Bi} \cos(\beta_n z) \exp\left(-\beta_n^2 \mathrm{Fo}\right)}{\beta_n^2 \left(\beta^2 + \mathrm{Bi}^2 + \mathrm{Bi}\right)} \right] \qquad (246)$$

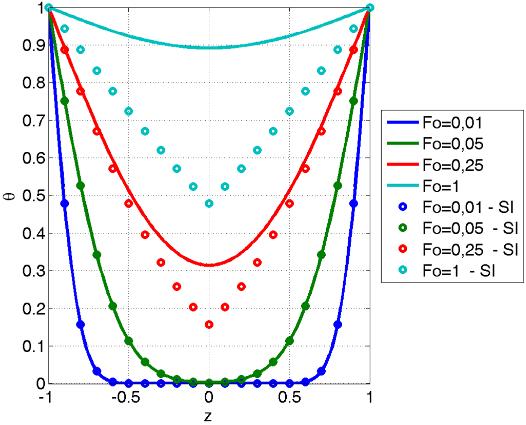
- où les β_n sont les solutions de

$$\beta \tan(\beta) = \mathrm{Bi} \qquad (247)$$

- θ ne dépend que de z,Bi et Fo



Exemple de profil

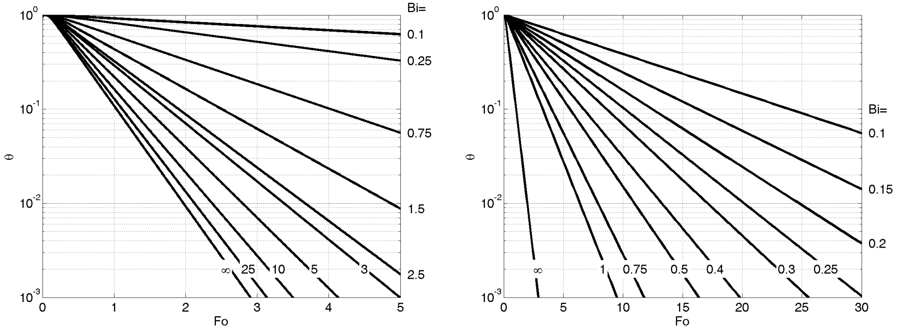


- Pour Bi $\rightarrow +\infty$
- - SI : solutions données par deux massifs semi-infinis

Solutions générales

- Les profils sont tabulés (θ en fonction de Bi et Fo) pour différentes géométries (et différentes longueurs caractéristiques !) :
  - Plaque plane (demi épaisseur)
  - Cylindre infini (rayon)
  - Sphère (rayon)
- Règles de combinaisons pour des formes dérivées de celles ci (cylindre fini, parallélépipède, ...)
- Si forme plus compliquée : résolution numérique

Exemple de table pour le système plan



- Bien d'autres tables aux exercices

J'avais pas mis une bouteille au frigo ?

- Résistance interne négligeable : 1h12
- Massif semi-infini, 3h15 (pas la bonne hypothèse).
- Ici, si cylindre infini, *Bi* et *Fo* en fonction du rayon r_0

$$\theta = 0.5 \qquad (248)$$
$$\mathrm{Bi} = 2.05 \qquad (249)$$

- Dans les tables on trouve

$$\mathrm{Fo} \simeq 0.4 \qquad (250)$$
$$\Rightarrow t = \frac{\mathrm{Fo}\, r_0^2}{\alpha} = 4691s \qquad (251)$$

- Il faut 1h18 (proche de la résistance interne négligeable)

En résumé

$$\theta = f\left(\text{Bi} = \frac{hL}{\lambda}, \text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2}\right) \tag{252}$$

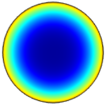
<u>Temps initiaux</u>

Volume semi-infini

$$\text{Fo} \ll 1 \tag{253}$$

$$\text{Bi} \rightarrow +\infty \tag{254}$$

$$\theta = erf\left(\frac{x}{2L\text{Fo}^{1/2}}\right)$$

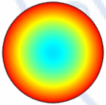


<u>Temps intermédiaire</u>

Volume fini

A utiliser quand les cas plus simples ne sont pas d'application

Solutions tabulées

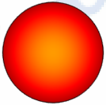


<u>Longs temps</u>

Résistance interne négligeable

$$\text{Bi} < 0,1 \tag{255}$$

$$\theta = \exp\left[-\text{FoBi}\right]$$



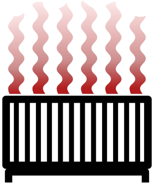
Plan du chapitre

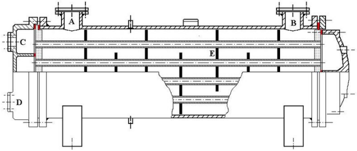
Plan du chapitre

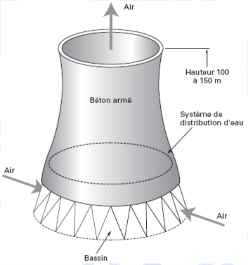
2. Modes de transport de la chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
6. Echangeurs de chaleur
   - Description des échangeurs de chaleur
   - Bilans sur un échangeur double pipe simple
   - Facteur correctif
   - Efficacité et nombre d'unité de transfert
   - Autres généralisations

Échangeurs de chaleur

- Nom générique désignant des installations dont le but premier est le transfert de chaleur entre 2 fluides
  - A l'échelle domestique : radiateurs, refroidissement des processeurs, …
  - A l'échelle industrielle : échangeurs à calandres, tours de refroidissement, …





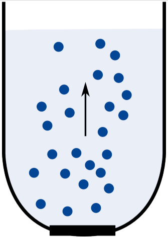


Elements clés du design

- Amener le fluide utile à la température voulue (contrôle du flux de chaleur)
- Parfois : pouvoir changer cette température visée
- Em minimisant :
    - Les pertes thermiques vers l'extérieur
    - Le volume de l'installation (encombrement)
    - Les coûts d'investissement
    - Les coûts d'utilisation et de maintenance :
        - Pertes de charges importantes
        - Encrassement...
- Il n'y a pas de de design parfait d'échangeur de chaleur , mais de (très) nombreux modèles différents

Classification des échangeurs de chaleur

Contact direct/indirect entre les phases

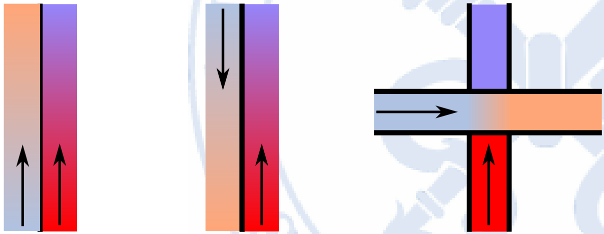
Echangeur	Direct	Indirect
		
Surface spécifique	+	-
Coefficient de transfert	+	-
Contrôle du temps de contact	-	+
Séparation des fluides	-	+

- Avec/sans changement de phase
- Mouvement des fluides par convection forcée/naturelle (débit de fluide indépendant/dépendant du transfert de chaleur)

Sens des écoulements

- Paramètre clé = direction d'écoulement des fluides l'un par rapport à l'autre
- 3 situations de références :

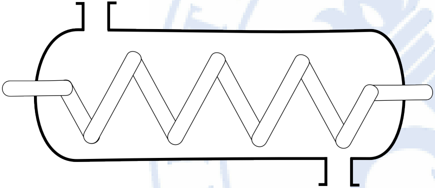
co-courants contre-courants courants croisé

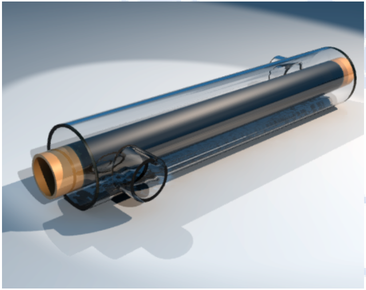


Beaucoup d'échangeurs combinent ces situations

Les échangeurs double tubes (double pipe)

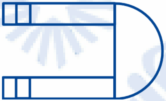
- Simple de conception et de compréhension
- Surface d'échange (très) limitée
- Simple à entretenir

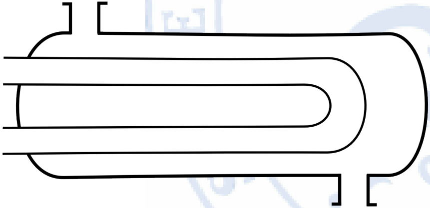




Les échangeurs double tubes en U (Double tube U)

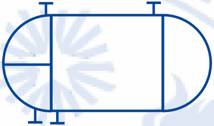
- Simple de conception et de compréhension
- Surface d'échange limitée
- Simple à entretenir
- Entrée et sortie proches

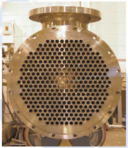


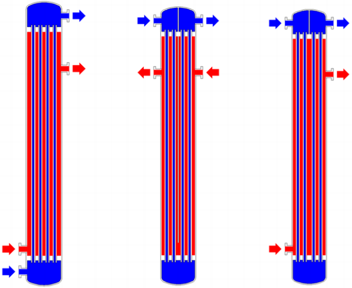


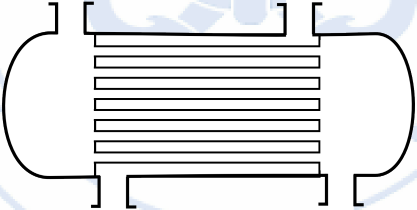
Les échangeurs à tubes et calandres (shell and pipe)

- Bonne surface de contact
- Encombrant
- Difficile d'entretien



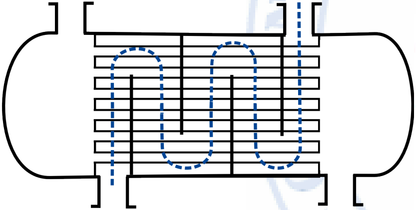


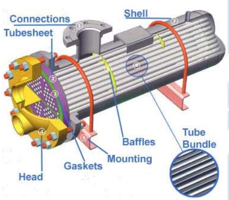




Les échangeurs à tubes et calandres avec chicanes (shell and pipe with baffles)

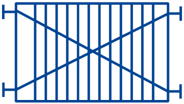
- Augmentation du temps de séjour d'un des fluides

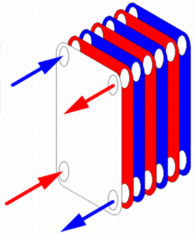




Les échangeurs à plaques (plate)

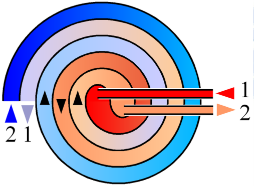
- Compact
- Facile à nettoyer
- Grande surface d'échange
- Surface d'échange modulable
- Haut coefficients de perte de charge
- Uniquement débits modérés





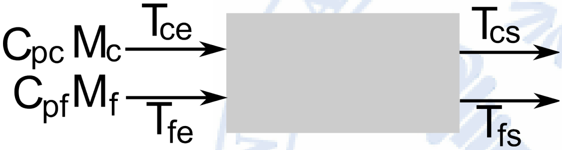
Les échangeurs à spirales

- Très Compact
- Grande surface d'échange
- Cher
- Difficile d'entretien



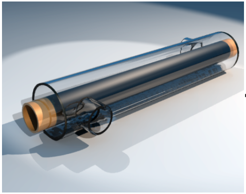
Plan du chapitre

Pratiquement on veut



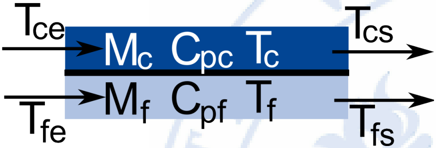
- Connaissant les propriétés du fluide
- Contrôlant les débits et températures d'entrées
- Quelles sont les temperatures de sortie ?
- Ou a l'inverse, quelle surface d'échange est nécessaire à transférer une quantité de chaleur fixée ?

Commençons par une situation simple



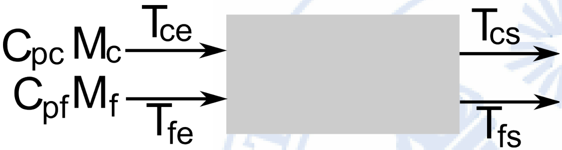
- 2 fluides en contact simple à cocourant
- Surface d'échange uniforme sur toute la longueur
- Pas de changement de phase
- Débits constants
- Propriétés des fluides constantes
- En régime stationnaire
- Les températures ne varient que dans le sens de l'écoulement

Nomenclature



- Fluide chaud (indice $_c$) et froid (indice $_f$) :
  - Débit massique M ($kg.s^{-1}$)
  - Température d'entrée (*à gauche*) T_e (K)
  - Température de sortie (*à droite*) T_s (K)
  - Capacité calorique massique à pression constante C_p ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
- Surface d'échange Ω (m^2)
- Coefficient de transfert de chaleur effectif $U = R^{-1}$ ($W.m^{-2}.K^{-1}$) (voir équation (136))
- Quantité totale de chaleur transférée Q_C (J)

Bilan global



- Valable à co-courant, contre-courant, courant croisé

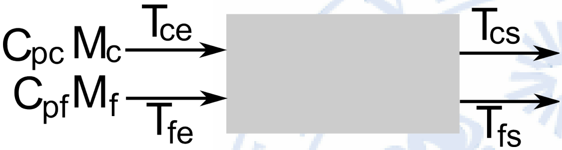
$$Q_{Cc} = M_c\,C_{pc}\,(T_{cs} - T_{ce}) \tag{256}$$

$$Q_{Cf} = M_f\,C_{pf}\,(T_{fs} - T_{fe}) \tag{257}$$

$$-Q_{Cc} = Q_{Cf} \tag{258}$$

$$\frac{M_c\,C_{pc}}{M_f\,C_{pf}} = -\frac{(T_{fs} - T_{fe})}{(T_{cs} - T_{ce})} \tag{259}$$

Bilan global : un peu trop peu



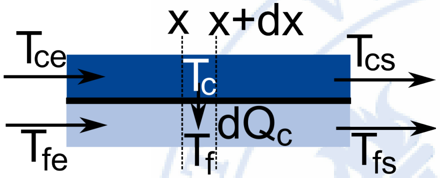
$$\boxed{\frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}} = \frac{(T_{fs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{cs})}} \qquad (260)$$

- Terme de gauche indépendant des températures
- 1 équation pour lier les températures
- On aimerait en avoir une autre de la forme :

$$Q_C = Q_{Cf} = -Q_{Cc} = U\Omega \underbrace{\Delta T}_{???} \qquad (261)$$

- Que vaut ce ΔT permet d'avoir cette équation ?

Bilan local



- Mêmes bilans que pour le système global :

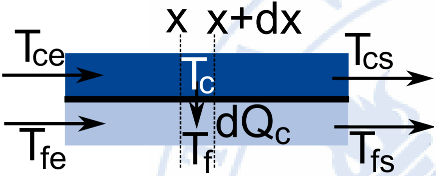
$$dQ_{Cc} = M_c C_{pc} \left(T_{c(x+dx)} - T_{cx} \right) = M_c C_{pc} dT_c \qquad (262)$$

$$dQ_{Cf} = M_f C_{pf} \left(T_{f(x+dx)} - T_{fx} \right) = M_f C_{pf} dT_f \qquad (263)$$

- De plus on a une valeur du transfert par la paroi :

$$dQ_C = dQ_{Cf} = -dQ_{Cc} = U d\Omega \left(T_c - T_f \right) \qquad (264)$$

Manipulation de ces bilans



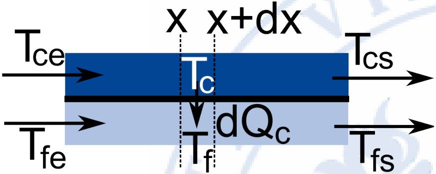
$$U d\Omega \left(T_c - T_f\right) = -M_c C_{pc} dT_c \tag{265}$$

$$U d\Omega \left(T_c - T_f\right) = M_f C_{pf} dT_f \tag{266}$$

$$dT_c = -\frac{U d\Omega \left(T_c - T_f\right)}{M_c C_{pc}} \tag{267}$$

$$dT_f = \frac{U d\Omega \left(T_c - T_f\right)}{M_f C_{pf}} \tag{268}$$

Manipulation des bilans (2)



- En prenant (267)- (268)

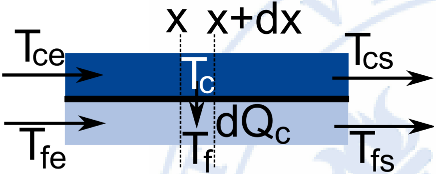
$$d(T_c - T_f) = -\frac{Ud\Omega(T_c - T_f)}{M_c C_{pc}} - \frac{Ud\Omega(T_c - T_f)}{M_f C_{pf}} \quad (269)$$

$$\frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -\frac{Ud\Omega}{M_c C_{pc}} \left[1 + \underbrace{\frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}}}_{\text{connu}} \right] \quad (270)$$

- En utilisant l'équation (260)

$$\frac{d(T_c - T_f)}{(T_c - T_f)} = -\frac{Ud\Omega}{M_c C_{pc}} \left[1 + \frac{(T_{fs} - T_{fe})}{(T_{ce} - T_{cs})} \right] \quad (271)$$

Manipulation des bilans (3)



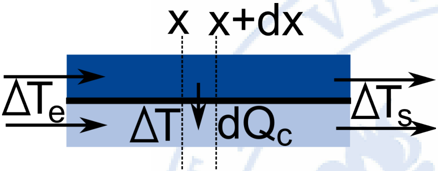
$$\frac{d\left(T_c - T_f\right)}{\left(T_c - T_f\right)} = -\frac{Ud\Omega}{M_c C_{pc}} \left[\frac{\left(T_{ce} - T_{cs}\right) + \left(T_{fs} - T_{fe}\right)}{\left(T_{ce} - T_{cs}\right)}\right] \quad (272)$$

$$\frac{d\left(T_c - T_f\right)}{\left(T_c - T_f\right)} = \frac{Ud\Omega}{M_c C_{pc}} \left[\frac{\left(T_{cs} - T_{fs}\right) - \left(T_{ce} - T_{fe}\right)}{\left(T_{ce} - T_{cs}\right)}\right] \quad (273)$$

- Or $Q_C = M_c C_{pc} \left(T_{ce} - T_{cs}\right)$

$$\frac{d\left(T_c - T_f\right)}{\left(T_c - T_f\right)} = \frac{Ud\Omega}{Q_C} \left[\left(T_{cs} - T_{fs}\right) - \left(T_{ce} - T_{fe}\right)\right] \quad (274)$$

Manipulation des bilans : changement de variable



- Posons

$$\Delta T = (T_c - T_f) \tag{275}$$

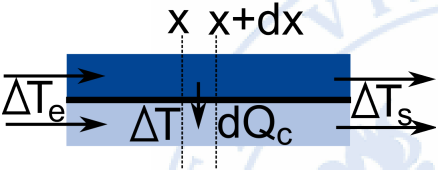
- On a alors

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = \frac{U d\Omega}{Q_C}(\Delta T_s - \Delta T_e) \tag{276}$$

$$\int_{\Delta T_e}^{\Delta T_s} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = \int_0^{\Omega} \frac{U}{Q_C}(\Delta T_s - \Delta T_e)\, d\Omega \tag{277}$$

$$\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right) = \frac{U\Omega}{Q_C}(\Delta T_s - \Delta T_e) \tag{278}$$

La différence de température logarithmique



$$\boxed{Q_C = U\Omega \frac{(\Delta T_s - \Delta T_e)}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}} \quad (279)$$

- Si on définit la différence de température logarithmique

$$\Delta T_{ln} = \frac{(\Delta T_s - \Delta T_e)}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)} \quad (280)$$

- On retombe sur l'expression recherchée (équation (261))

$$\boxed{Q_C = U\Omega\Delta T_{ln}} \quad (281)$$

Et à contre courant ?

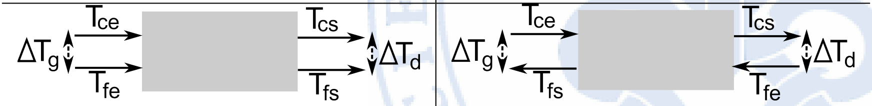
- Le bilan global (260) est le même
- Le bilan local est le même SAUF au niveau des conditions aux limites :
  - On intègre toujours de *gauche à droite*
  - Mais à gauche (et à droite) on a une entrée et une sortie.
- Donc l'expression finale reste valable si on exprime les équations
  - Non plus en différences des entrées et différences des sorties
  - Mais en différence à gauche et différence à droite

Expression valable en contre courant et en co-courant :

$$\boxed{\Delta T_{ln} = \frac{(\Delta T_d - \Delta T_g)}{\ln\left(\frac{\Delta T_d}{\Delta T_g}\right)}} \tag{282}$$

$$\boxed{Q_C = U\Omega\Delta T_{ln}} \tag{283}$$

Co-courant	Contre-courant



Co-courant :

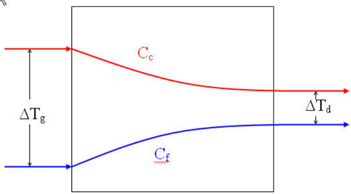
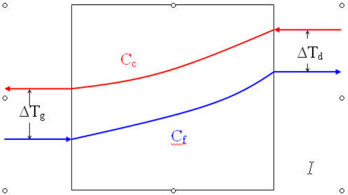
$$\Delta T_g = T_{ce} - T_{fe}$$
$$\Delta T_d = T_{cs} - T_{fs}$$

Contre-courant :

$$\Delta T_g = T_{ce} - T_{fs}$$
$$\Delta T_d = T_{cs} - T_{fe}$$

- Droite et gauche sont interchangeables.

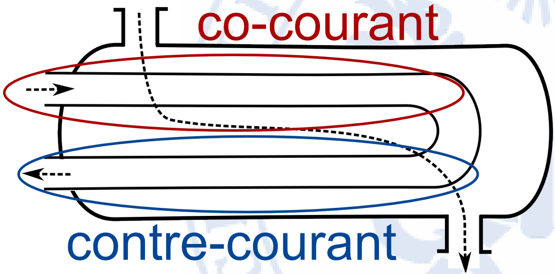
Profils de températures

Co-courant	Contre-courant
	

Plan du chapitre

Faisceaux complexes

- Si pas uniquement co-courant ou contre-courant, que faire ?
- Soit approcher l'échangeur par une succession de zones co-courants et contre-courants (modèle à compartiment)



- Soit essayer d'exprimer un équivalent à un faisceau simple

$$\boxed{Q_C = U\Omega\Delta T_{ln}} F \tag{284}$$

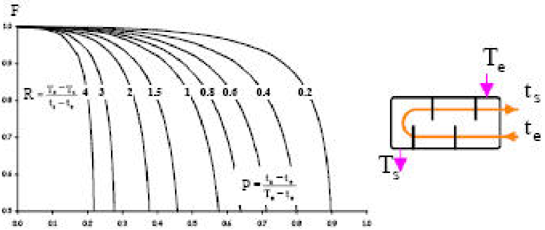
- La convention est de calculer ΔT_{ln} en contre-courant.
- F facteur correctif

Facteur correctif

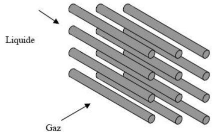
- Tabulé pour une série d'échangeurs complèxes
- Sur base de la valeur d'autres paramètres :

$$R = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}} \tag{285}$$

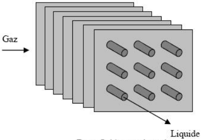
$$P = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} \tag{286}$$



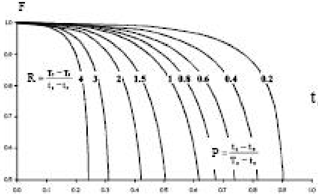
Exemples de tables

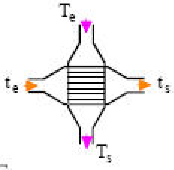


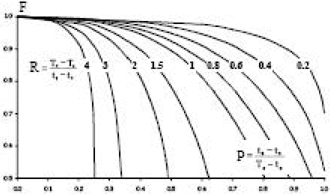
Un fluide brassé et un fluide non brassé

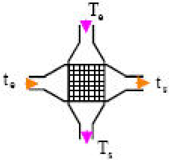


Deux fluides non brassés









Plan du chapitre

Efficacité

- Autre méthode pour évaluer un échanger de chaleur quelconque
- On compare la quantité de chaleur réellement transférée :

$$Q_C = M_c C_{pc} \left(T_{ce} - T_{cs} \right) = M_f C_{pf} \left(T_{fe} - T_{fs} \right) \tag{287}$$

- Avec la quantité qu'on pourrait au maximum transférer
- Le rapport est appelé efficacité

$$\boxed{\epsilon = \frac{Q_C}{Q_{Cmax}}} \tag{288}$$

Quelle est cette valeur maximale ?

- Au plus, les fluides peuvent passer de T_{ce} à T_{fe}

$$Q_{Cmaxc} = M_c C_{pc} (T_{ce} - T_{fe}) \qquad (289)$$
$$Q_{Cmaxf} = M_f C_{pf} (T_{ce} - T_{fe}) \qquad (290)$$

- Q_{Cmax} est le minimum de ces 2 valeurs
- Donc, on compare $M_c C_{pc}$ et $M_f C_{pf}$
- La plus faible de ces valeurs est appelée $M_{min} C_{pmin}$

$$Q_{Cmax} = M_{min} C_{pmin} (T_{ce} - T_{fe}) \qquad (291)$$

Expression de l'efficacité

$$\epsilon = \frac{M_c C_{pc} \left(T_{ce} - T_{cs}\right)}{M_{min} C_{pmin} \left(T_{ce} - T_{fe}\right)} = \frac{M_f C_{pf} \left(T_{fs} - T_{fe}\right)}{M_{min} C_{pmin} \left(T_{ce} - T_{fe}\right)} \tag{292}$$

Si $M_{min} C_{pmin} = M_c C_{pc}$

$$\epsilon = \frac{\left(T_{ce} - T_{cs}\right)}{\left(T_{ce} - T_{fe}\right)} \tag{293}$$

Si $M_{min} C_{pmin} = M_f C_{pf}$

$$\epsilon = \frac{\left(T_{fs} - T_{fe}\right)}{\left(T_{ce} - T_{fe}\right)} \tag{294}$$

Nombre d'unités de transfert

- *Number of Transfer Unit* (NTU), Nombre d'unité de transfert (NUT)

$$\text{NTU} = \frac{U\Omega}{M_{min}C_{pmin}} \tag{295}$$

- Indique la capacité de transfert d'un chaleur
- Pour un modèle donné, augmenter le NTU implique d'augmenter la surface d'échange
- On peut établir un lien entre ϵ et NTU pour savoir quel est l'impact de la taille de l'installation sur son efficacité :
  - Est-ce intéressant d'agrandir l'installation
  - Quelle est l'éfficacité maximale d'un modèle donné ?
- Le lien ϵ - NTU est une alternative au ΔT_{ln} pour dimensionner un échangeur

Calcul pour un échangeur à co-courant

- L'équation (270) intégrée devient

$$\ln\left(\frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}}\right) = \frac{U\Omega}{M_c C_{pc}}\left[1 + \underbrace{\frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}}}_{\text{connu}}\right] \tag{296}$$

- Si $M_{min} C_{pmin} = M_c C_{pc}$, la définition de NTU (équation (295))

$$\text{NTU} = \frac{U\Omega}{M_c C_{pc}} \tag{297}$$

- L'efficacité s'écrit

$$\epsilon = \frac{(T_{ce} - T_{cs})}{(T_{ce} - T_{fe})} \tag{298}$$

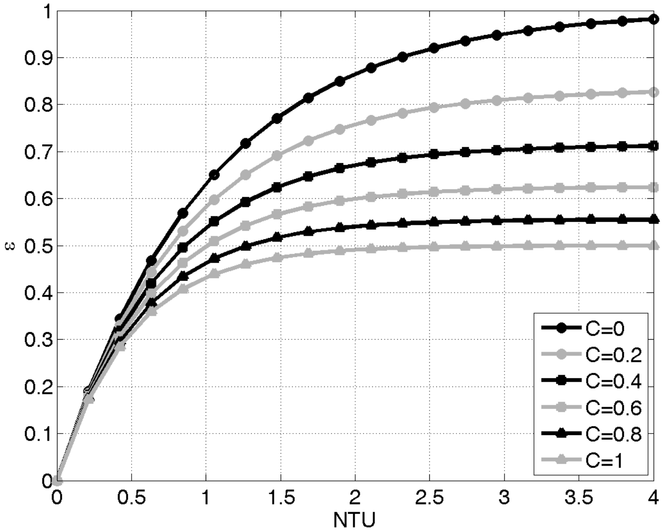
- En réarrangeant l'équation (296) pour exprimer les arguments du ln en fonction de ϵ : (un rien long à faire...)

$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left[-\text{NTU}\left(1 + \frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}}\right)\right]}{1 + \frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}}} \tag{299}$$

Plus généralement

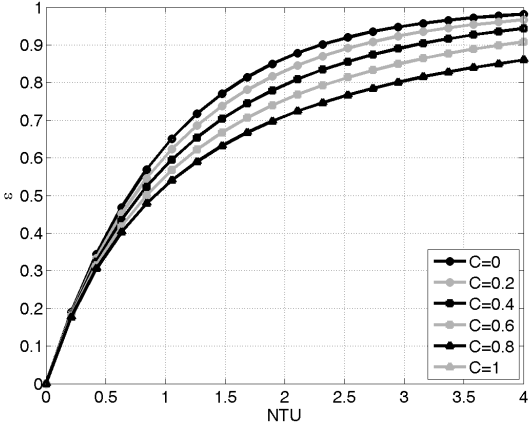
- Si $M_{min} C_{pmin} = M_f C_{pf}$ on obtient la même expression mais où il faut remplacer
$$\frac{M_c C_{pc}}{M_f C_{pf}} \rightarrow \frac{M_f C_{pf}}{M_c C_{pc}} \tag{300}$$
- Donc la loi (299) se généralise en terme de $M_{min} C_{pmin}$ et $M_{max} C_{pmax}$
- En définissant
$$C = \frac{M_{min} C_{pmin}}{M_{max} C_{pmax}} \tag{301}$$
- On peut écrire
$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left[-\mathrm{NTU}\,(1 + C)\right]}{1 + C} \tag{302}$$
- Des formules existent pour de nombreuses configurations

Graphiquement (co-courant)



En contre courant

$$\epsilon = \frac{1 - \exp\left[-\mathrm{NTU}\,(1 - C)\right]}{1 - C\exp\left[-\mathrm{NTU}\,(1 - C)\right]} \tag{303}$$



Plan du chapitre

2. Modes de transport de la chaleur
3. Transport stationnaire par conduction
4. Transport stationnaire par convection
5. Transport instationnaire
6. Echangeurs de chaleur
   - Description des échangeurs de chaleur
   - Bilans sur un échangeur double pipe simple
   - Facteur correctif
   - Efficacité et nombre d'unité de transfert
   - Autres généralisations

Remarques sur les valeurs des coefficients

$$\boxed{Q_C = U\Omega\Delta T_{ln}F} \tag{304}$$

- U et Ω ne sont pas toujours bien connus :
  - Encrassement : ajout d'une résistance d'encrassement ($U \searrow$)

$$U^{-1} = R = r_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + R_{enc} \tag{305}$$

  - Surface complexe et variable selon la position
  - U dépendant de l'écoulement et de la position
- Définitions de valeurs pratiques de U et Ω.
- Via mesures du fonctionnement : déduction du produit $U\Omega$
- Souvent exprimé sous cette forme $U\Omega$.

Avec changement de phase

- La température maintenue constante pour le fluide qui change de phase (à pression constante)
- Le bilan de base doit être revu :
  - La température n'est pas un indicateur de la quantité d'énergie transmise par le corps qui change de phase
  - On droit prendre en compte les fractions massiques également
- Mais, phénomènes complexes liés au changement de phase (retard à l'ébullition, ...)
- Voir cours d'Opérations Unitaires

Troisième partie III

Transfert de matière

Plan de la partie

7. Transfert de matière

Plan du chapitre

7. Transfert de matière
   - Généralités
   - Définition des grandeurs clés
   - Principe de la diffusion
   - Diffusion en mélange binaire
   - Diffusion instationnaire
   - Transfert convectif

Objectif du chapitre

- Définir le transfert de matière
- Décrire en détail le transport par convection
- Montrer les analogies et différences avec le transfert de chaleur
- Adapter ce qui a été vu en transfert de chaleur au transfert de matière

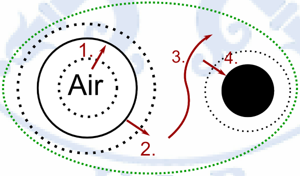
Plan du chapitre

7. Transfert de matière
   - Généralités
   - Définition des grandeurs clés
   - Principe de la diffusion
   - Diffusion en mélange binaire
   - Diffusion instationnaire
   - Transfert convectif

Généralités

Transfert de matière = transport d'une espèce (chimique) dans le milieu (d'autres espèces).

- Omniprésent dans la vie de tous les jours :
  - Dissolution du sucre
  - Infusion du thé
  - Evacuation de l'humidité
  - ...
- Et dans les systèmes industriels
  - Systèmes catalytiques
  - Consommation de solides
  - Absorption
  - Distillation
  - Evaporation (séchage)



Les équations de transports

- Possibilité de définir des équations de transport pour toute *quantité*
- Ces transports peuvent se diviser en 2 parties principales :
  - Un mouvement *convectif* lié au déplacement de l'ensemble de la matière
  - Un mouvement *diffusif* omniprésent et indépendant du déplacement d'ensemble
- Beaucoup de transports ont un transport diffusif similaire :

$$\text{Flux} = \text{coefficient} \; * \; \text{gradient d'une grandeur intensive} \tag{306}$$

- Pour tous les modes de transport suivant cette loi, on peut travailler par analogie

Exemples courant

Chaleur

Conduction

- Loi de Fourier

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

- Diffusivité thermique $(m^2.s^{-1})$

$$\alpha = \frac{\lambda}{C_p \rho}$$

Loi de Newton en convection

$$q = h\,(T_i - T_b)$$

Mouvement

Viscosité

- Loi de Newton

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_y}{dx}$$

- Viscosité cinématique $(m^2.s^{-1})$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Convection = inertie

Matière

Diffusion

- Loi de Fick

$$J_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dx}$$

- Coefficient de diffusion D_{AB} $(m^2.s^{-1})$

Loi de Newton en convection

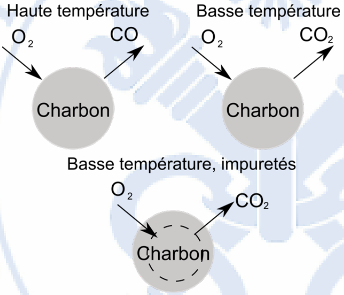
$$J_A = k\,(C_{Ab} - C_{Ai})$$

Similitudes et différences

- Les équations de ces différents modes de transports sont (globalement) les mêmes
- Les résolutions, corrélations, règles, ... sont donc a priori les mêmes (en adaptant les grandeurs)
- Cependant quelques différences sont à prendre en compte.
- Les principales lorsque l'on compare le transport de matière au transport de chaleur sont :
  - Une grande sensibilité au système chimique considéré
  - La non-continuité de la valeur de la grandeur intensive (concentration) à l'interface

Importance du système chimique

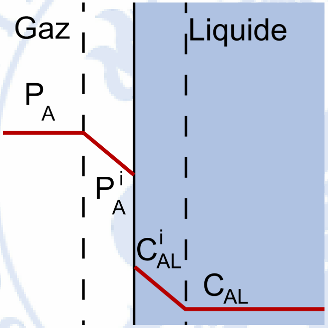
- Exemple du charbon
- Si idéal : pas de cendres qui s'accumulent
- Diminution du rayon de la particule
- Avec impureté : les cendres peuvent rester
- Limitation par la diffusion dans les cendres



Saut à l'interface

- Régit par des lois thermodynamique
- Existe pour tout couple de phase :
  - Eau dans l'air
  - CO_2 dans l'eau
  - Xéon dans le verre
- Exemple des couples gaz-liquide
- Loi d'équilibre à l'interface

$$p_A^i = KC_{AL}^i \tag{307}$$



Plan du chapitre

Choix d'une grandeur intensive

- En transport de chaleur, la température est la seule grandeur intensive courante
- En transport de matière, beaucoup de choix : expression d'une quantité de matière par autre quantité de matière :
  - Nombre de mole par unité de volume (concentration)
  - Nombre de mole par mole (% mole)
  - Masse par une unité de volume (concentration massique)
  - ...
- Deux conventions :
  - Mécanique des fluides : concentration massique
  - Chimie : concentration

Nomenclature

- ρ_i concentration massique de l'espèce i (kg/m^3)
- $\rho = \sum_i \rho_i$ concentration massique totale (kg/m^3)
- $m_i = \rho_i/\rho$ fraction massique
- C_i concentration molaire de l'espèce i $(moles/m^3)$
- $C = \sum_i C_i$ concentration molaire totale $(moles/m^3)$
- $x_i = C_i/C$ fraction molaire
- $p_i = \rho_i RT$ Pression partielle (Pa)
- v_i vitesse de déplacement de l'espèce i (m/s)

Définitions des vitesses

- v vitesse molaire du mélange (m/s)

$$v = \frac{\sum_i C_i v_i}{C} = \sum_i x_i v_i \tag{308}$$

- v^* vitesse massique du mélange (m/s)

$$v^* = \frac{\sum_i \rho_i v_i}{\rho} = \sum_i m_i v_i \tag{309}$$

Flux

- $N_A = C_A v_A$ flux molaire de A $(mole/m^2/s)$

$$
\begin{aligned}
N_A &= C_A\left(v_A - v\right) + C_A v && (310)\\
&= C_A\left(v_A - v\right) + x_A \sum_i C_i v_i && (311)\\
&= \underbrace{J_A}_{\text{flux diffusif}} + \underbrace{x_A N}_{\text{flux convectif}} && (312)
\end{aligned}
$$

- $N = \sum_i C_i v_i$ flux convectif de l'ensemble du fluide
- $n_A = \rho_A v_A^*$ flux massique de A $(kg/m^2/s)$

$$
\begin{aligned}
n_A &= \rho_A\left(v_A - v^*\right) + m_A \sum_i \rho_i v_i && (313)\\
&= \underbrace{j_A}_{\text{flux diffusif}} + \underbrace{m_A n}_{\text{flux convectif}} && (314)
\end{aligned}
$$

- $n = \sum_i \rho_i v_i$ flux convectif de l'ensemble du fluide

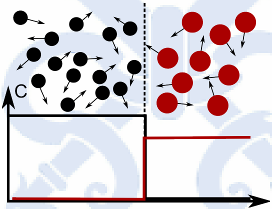
Plan du chapitre

La diffusion : approche microscopique

- Les termes j_A et J_A exprime un mouvement d'une espèce par rapport au mouvement moyen
- Ce mouvement s'explique par l'agitation moléculaire

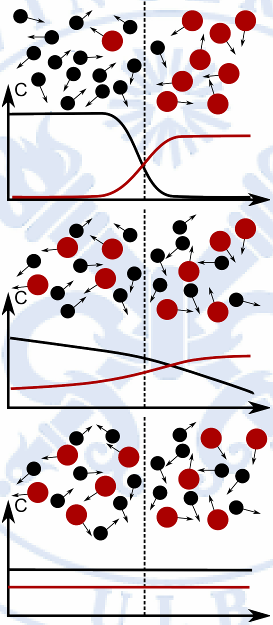
Soit un cas simplifié

- Deux espèces différentes
- Initialement séparées (2 milieux purs)
- Mis en contact à l'instant initial
- Comment évoluent les concentrations



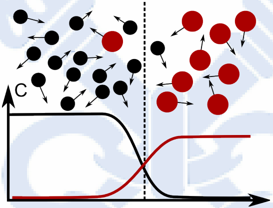
Mécanisme microscopique

- Par agitation moléculaire, les particules des deux corps se cognent et se croisent
- Après *peu de temps*, certaines particules des 2 espèces ont *échangé* leurs places
- Le profil de concentration évolue donc.
- Au début, tout *échange* se fait entre les deux espèces $\Rightarrow$ transfert de matière intense
- Au fur et à mesure, moins d'échange entre les deux espèces,
- Quand on a des concentrations uniformes : pas d'échanges nets



Déductions

- Le flux diffusif de matière est proportionnel au gradient de concentration
- Pas de flux net sans différence de concentration nette
- La vitesse de diffusion dépend :
  - Des espèces en présence et de leurs interactions
  - De la température
  - De la pression totale



Loi fondamentale : Loi de Fick

$$J_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} \quad (315)$$

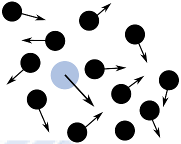
$$j_A = -\rho D_{AB}\frac{dm_A}{dz} \quad (316)$$

- Relation phénoménologique
- Démontrable sur base du mouvement brownien
- Analogue aux lois de Fourier (conduction de chaleur), Newton (viscosité), Ohm (conduction électrique)
- D_{AB} coefficient de diffusion de A dans B (m^2/s)
  - Dépend de la pression, de la température et de la composition du milieu
  - $D_{AB} = D_{BA}$
  - Il existe d'autres sources de diffusion (voir Génie des réacteurs multiphasiques l'an prochain)
  - Courant d'utiliser une diffusivité effective

Coefficient de diffusion

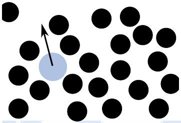
Gaz

- Dépend peu de la composition
- $1/p, \quad T^{1.5}$
- De l'ordre de $10^{-5} m^2.s^{-1}$



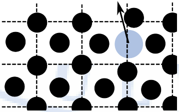
Liquide

- Augmente avec la concentration, $1/\mu, \quad T$
- De l'ordre de $10^{-5} \to 10^{-9} m^2.s^{-1}$
- souvent limitant !



Solide

- Augmente avec la concentration, T
- De l'ordre de $10^{-9} \to 10^{-13} m^2.s^{-1}$



Plan du chapitre

Diffusion dans un mélange binaire

$$x_A + x_B = 1 \quad (317)$$

$$N_A = J_A + x_A N \quad (318)$$

$$N_B = J_B + x_B N \quad (319)$$

$$N_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A\left(N_A + N_B\right) \quad (320)$$

$$N_B = -CD_{AB}\frac{dx_B}{dz} + x_B\left(N_A + N_B\right) \quad (321)$$

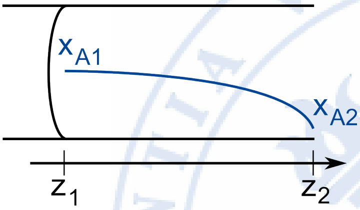
- De manière générale, il faut donc résoudre les équations pour A et B
- Dans la pratique beaucoup de simplifications possibles.
- 2 dans ce cours :
  - Le gaz stagnant
  - La contre-diffusion équimolaire ou soluté dilué

Diffusion dans un gaz stagnant

- Dans de nombreuses situation, un de 2 composants ne bouge pas/peu
- Typique d'une phase gazeuse à basse pression
- Exemples pratique : diffusion de l'eau dans l'air...
- Très utilisé en évaporation et en absorption
- Sous cette hypothèse :

$$
\begin{aligned}
N_B &= 0 && (322)\\
N_A &= -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A N_A && (323)\\
&= \frac{-CD_{AB}\frac{dx_A}{dz}}{1-x_A} && (324)
\end{aligned}
$$

Application à l'évaporation dans un tube



$$N_A = \frac{-CD_{AB}\frac{dx_A}{dz}}{1-x_A} \quad (325)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{N_A}{CD_{AB}} dz = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} -\frac{dx_A}{1-x_A} \quad (326)$$

$$N_A = \frac{CD_{AB}}{z_2 - z_1} ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right) \quad (327)$$

Autre simplification

$$N_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A\left(N_A + N_B\right) \quad (328)$$

$$N_B = -CD_{AB}\frac{dx_B}{dz} + x_B\left(N_A + N_B\right) \quad (329)$$

- Une autre stratégie courante est d'estimer que le terme convectif $x_A\left(N_A + N_B\right)$ est négligeable par rapport au terme diffusif
- Dans ce cas N_A ne depend plus de N_B
- L'équation du flux se réduit alors à

$$N_A = J_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} \quad (330)$$

Contre-diffusion équimolaire ou concentration diluée

- Cette hypothèse ($x_A N \ll J_A$) est vérifiée dans deux cas courants :

  Contre-diffusion équimolaire Si tout déplacement de A est contrebalancé par un mouvement inverse de B (courant si A et B sont des molécules de taille et structure proche)

  $$N_A \simeq -N_B \tag{331}$$

  Concentration diluée Lorsque A est en faible concentration

  $$x_A \ll 1 \tag{332}$$

- On a alors bien

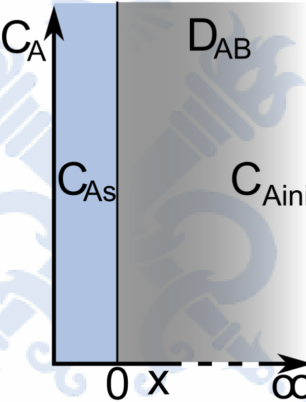
  $$N_A = J_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} \tag{333}$$

Plan du chapitre

Diffusions instationnaire dans un volume semi-infini

1. Définition du problème

Soit une surface plane infinie délimitant un objet solide semi-infini initialement à concentration C_{Aini} et instantanément (en $t = 0$) plongé dans un milieu à une concentration C_{As}. A un instant donné, à quelle profondeur maximale la concentration est-elle affectée ?



- Ce problème, courant, est exactement celui que nous avons résolu en transfert de chaleur
- Nous pourrions refaire la même chose (bilans, ...)
- Ou nous pouvons reprendre immédiatement le résultat
- Il en va de même pour toute la partie du transfert instationnaire

Que faut il adapter

$$T \rightarrow x_A, m_A \quad (334)$$

$$\rho \rightarrow C, \rho \quad (335)$$

$$C_p \rightarrow 1 \quad (336)$$

$$\alpha \rightarrow D_{AB} \quad (337)$$

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (338)$$

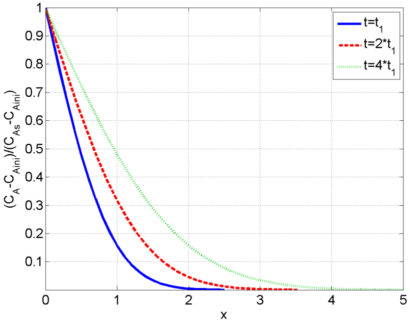
Devient

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \quad (339)$$

Donc le massif semi-infini pour le transfert de matière donne

$$\boxed{\frac{C_A - C_{Aini}}{C_{As} - C_{Aini}} = erf\left(\frac{z}{(4D_{AB}t)^{1/2}}\right)} \tag{340}$$

- A un instant donné : profil de concentration dans le massif
- A une valeur de $\left(\frac{z}{(4D_{AB}t)^{1/2}}\right)$ correspond une concentration constante
- Toute l'analyse est similaire qu'en transfert de matière (progession dans le massif en $\sqrt{ts}$



Plan du chapitre

En convection

$$N_A = -CD_{AB}\frac{dx_A}{dz} + x_A\left(N_A + N_B\right) \quad (341)$$

$$N_B = -CD_{AB}\frac{dx_B}{dz} + x_B\left(N_A + N_B\right) \quad (342)$$

- Comme en transfert de chaleur : convection = diffusion + advection
- Au cœur d'un fluide en mouvement : l'advection domine

$$N_A = x_A N \quad (343)$$

$$N_B = x_B N \quad (344)$$

- Il suffit alors de connaître la vitesse d'ensemble du fluide.
- Près des objets, le profil de vitesse est plus complexe
- Approche par une loi de Newton, comme en transfert de chaleur

Loi de Newton

$$\boxed{N_A = k\left(C_{Ab} - C_{Ai}\right)} \qquad (345)$$

- Comme pour le transfert de chaleur
- k dépend :
  - de l'écoulement (vitesse),
  - de la géométrie, des surfaces (dimension caractéristique, état de surface),
  - des fluides (viscosité, masse volumique, coefficients de diffusion)
- Analyse dimensionnelle sur base de nombres sans dimensions

Nombre sans dimension

- C'est la même démarche qu'en transfert de chaleur (convection forcée)
- Les nombres s'obtiennent donc par analogie :

Reynolds caractéristique de l'écoulement, le même qu'en transfert de chaleur

$$\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu} \tag{346}$$

Schmidt L'équivalent du nombre de Prandtl en transfert de chaleur

$$\mathrm{Sc} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \tag{347}$$

Sherwood L'équivalent du nombre de Nusselt

$$\mathrm{Sh} = \frac{k d_p}{D_{AB}} \tag{348}$$

Corrélations

- On peut obtenir les corrélations par substitution par rapport au transfert de chaleur

$$\mathrm{Pr} \rightarrow \mathrm{Sc} \tag{349}$$
$$\mathrm{Nu} \rightarrow \mathrm{Sh} \tag{350}$$

Écoulement dans un tube long

$$\mathrm{Nu}_d = 0,023\mathrm{Re}_d^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4}\ [\mathrm{Pr} > 0.5] \tag{351}$$
$$\mathrm{Sh}_d = 0,023\mathrm{Re}_d^{0.8}\mathrm{Sc}^{0.4}\ [\mathrm{Sc} > 0.5] \tag{352}$$

Écoulement autour d'une sphère

$$\mathrm{Nu} = 2 + 0,6\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{353}$$
$$\mathrm{Sh} = 2 + 0,6\mathrm{Re}^{1/2}\mathrm{Sc}^{1/3} \tag{354}$$

Quatrième partie IV

Petits rappels

Plan de la partie

Examen

- Examen écrit
- Essentiellement des exercices
- Similaires mais différents des exercices vu
- Savoir faire des développements similaires à ceux du cours (y compris les bilans)
- Peu de théorie - encore moins de par cœur
- Formulaire de tables et formules disponibles à l'examen :
  - Le même qu'aux exercices
  - Le même qu'en ligne, présent avec les slides
- En seconde sess : c'est exactement le même principe

Examen typique

- Durée 3h
- Vous pouvez avoir une calculette non programmable
- Généralement 4 questions, une par thème parmi :
  1. L'écriture et la résolution de bilans de chaleur
  2. Un calcul de transfert de chaleur instationnaire
  3. Un calcul de transfert de chaleur convectif (utilisation de corrélations)
  4. Un calcul d'échangeur
  5. Une question sur le transfert de matière

Quelques conseils pour l'examen

- Détaillez vos raisonnement
- Notez toutes vos hypothèses
- Travailler en symbolique aussi longtemps que possible et ne remplacer par des valeurs numérique que le plus tard possible
- N'oubliez pas que toute valeur numérique s'accompagne d'unités